**Universidade Federal do Pará (UFPA)**
**Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME)**

---

**Disciplina: Probabilidade** **Prova $n^o$: 4 (Sub)**
**Professor: Héliton Ribeiro Tavares**

**Nome:** ______________________________ **Matrícula:** ____________

********************************** **Atenção:** ****************************************

*i*) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos

**1 2 3 4 5 6 7 8 9 10**

*ii*) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento.

*iii*) Caso o método a ser aplicado não esteja não explícito, será de livre escolha.

*iv*) A prova é estritamente individual e sem consulta.

***********************************************************************************

1) Para $X$ com distribuição abaixo, calcule $E(X^k), k = 1, 2$, e obtenha sua variância.

   a) $X \sim U_c(0, 1)$ (contínua)

   b) $X \sim U_d\{1, 2, \cdots, n\}$ (discreta)

.......................................................................................................................... ../PROB/MN052002b.TEX

2) Suponha que $X$ e $Y$ são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros $\lambda_1$ e $\lambda_2$, respectivamente. Para $k > 0$, determine $P(kX - Y > 0)$ usando:

   a) um método convencional

   b) por condicionamento, ou seja, $P(kX - Y > 0) = \int_0^\infty P(kX - Y > 0|Y = y) f_Y(y) dy$

.......................................................................................................................... ../PROB/CP231.TEX

3) Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes com valores $-1$ e 1, com probabilidades $n/(n+1)$ e $1/(n + 1)$, respectivamente, e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Determine $E[(-1)^{S_n}]$.

.......................................................................................................................... ../PROB/MN045014.TEX

4) Prove os seguintes resultados:

   (a) Suponha que a v.a. $X$ tenha $fgm$ $M_X$. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de $Y$ será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$

   (b) Suponha que $X$ e $Y$ sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por $M_X$ e $M_Y$, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

   (c) Generalize para uma soma qualquer: sejam $X_i$ v.a. independentes com fgm dadas por $M_i, i = 1, \cdots, n$. Então se $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, teremos que $M_Z(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_n(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$. Se, adicionalmente, as $X_i$ são identicamente distribuídas, teremos que $M_Z(t) = [M_1(t)]^n$.

.......................................................................................................................... ../PROB/CP103B.TEX

5) Considere $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a.i.i.d com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, e a média amostral dada por $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Através da FGM, obtenha a distribuição de $\overline{X}_n$.

.......................................................................................................................... ../PROB/MN05E34.TEX

6) Suponha que no ENEM a nota em cada área $X_i, i = 1, 2, 3, 4$ tenha média 500 e desvio-padrão 100. Cada curso ou instituição pode definir pesos $\alpha_i$ e construir a Nota Geral por $NG = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Supondo que a correlação entre as notas $X_i$ de cada par de áreas é $\rho$, obtenha:

   a) as expressões para a média e o desvio-padrão da Nota Geral.

   b) os valores quando $\alpha_i = 1/4, i = 1, 2, 3, 4$ e $\rho = 0.5$.

.......................................................................................................................... ../PROB/CP107.TEX

7) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

.................................................................................................................................... ../PROB/CP74.TEX

8) Suponha que a função de probabilidade conjunta de $X_1, X_2$ e $X_3$ é Multinomial com parâmetros $n, p_1, p_2$ e $p_3$. Assim, temos

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3},$$

com $x_1 + x_2 + x_3 = n$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

a) Obtenha a função geradora de momentos de $(X_1, X_2, X_3)$

b) Obtenha $\rho_{X_1, X_2}$

.................................................................................................................................... ../PROB/MN05E22.TEX

9) Seja $X$ uma v.a. tal que

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!}, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a fgm de $X$ e identifique sua distribuição.

.................................................................................................................................... ../PROB/MN056051.TEX

10) Mostre que para variáveis $X$ e $Y$ com variâncias finitas e positivas e quaisquer números reais $a, b, c$ e $d$, com $a$ e $c$ não nulos, e as transformações lineares $X^* = aX + b$ e $Y^* = cY + d$, temos

$$\rho_{X^*, Y^*} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & ac > 0 \\ -\rho_{X,Y} & ac < 0 \end{cases}$$

.................................................................................................................................... ../PROB/MN056002.TEX

**!!!!! Boa prova !!!!!**