Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME)

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 3**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

*********************************** **Atenção:** **
i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento.
iii) Caso o método a ser aplicado não esteja não explícito, será de livre escolha.
iv) A prova é estritamente individual e sem consulta.
****

1) Suponha que X e Y são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para $k > 0$, determine $P(kX - Y > 0)$ usando:

a) um método convencional

b) por condicionamento, ou seja, $P(kX - Y > 0) = \int_0^\infty P(kX - Y > 0|Y = y) f_Y(y)dy$

..../PROB/CP231.TEX

2) Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes com valores -1 e 1, com probabilidades $n/(n+1)$ e $1/(n+1)$, respectivamente, e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Determine $E[(-1)^{S_n}]$.

..../PROB/MN045014.TEX

3) Prove os seguintes resultados:

(a) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$

(b) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(c) Generalize para uma soma qualquer: sejam X_i v.a. independentes com fgm dadas por $M_i, i = 1, \cdots, n$. Então se $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, teremos que $M_Z(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_n(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$. Se, adicionalmente, as X_i são identicamente distribuídas, teremos que $M_Z(t) = [M_1(t)]^n$.

..../PROB/CP103B.TEX

4) Suponha que no ENEM a nota em cada área $X_i, i = 1, 2, 3, 4$ tenha média 500 e desvio-padrão 100. Cada curso ou instituição pode definir pesos α_i e construir a Nota Geral por $NG = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Supondo que a correlação entre as notas X_i de cada par de áreas é ρ, obtenha:

a) as expressões para a média e o desvio-padrão da Nota Geral.

b) os valores quando $\alpha_i = 1/4, i = 1, 2, 3, 4$ e $\rho = 0.5$.

..../PROB/CP107.TEX

5) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

..../PROB/CP74.TEX

6) Para uma função f qualquer, podemos estimar a integral $M = \int_0^1 f(x)dx$ utilizando o estimador $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$, em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, segundo o modelo Uniforme no intervalo $(0,1)$. Mostre que temos:

a) $E(T) = M$

b) $Var(T) = \frac{1}{n}\int_0^1 (f(x) - M)^2 dx$.

..../PROB/MN056008.TEX

7) Suponha que a função de probabilidade conjunta de X_1, X_2 e X_3 é Multinomial com parâmetros n, p_1, p_2 e p_3. Assim, temos

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3},$$

com $x_1 + x_2 + x_3 = n$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

a) Obtenha a função geradora de momentos de (X_1, X_2, X_3)

b) Obtenha ρ_{X_1, X_2}

..../PROB/MN05E22.TEX

8) Seja X uma v.a. tal que

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!}, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a fgm de X e identifique sua distribuição.

..../PROB/MN056051.TEX

!!!!! Boa prova !!!!!