Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME)

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 4**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ____ **Matrícula:** ______________

*********************************** **Atenção:** **
i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento
iii) A prova é estritamente individual e sem consulta.
****

1) A taxa de crescimento semanal (em porcentagem) no preço de uma certa ação foi modelada pela variável X que tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{10}(1+4x), & 0 \le x < 1; \\ \frac{1}{20}(3+8x), & 1 \le x < 2; \\ 1, & x \ge 2; \end{cases}$$

a) Calcule o valor esperado de X.

b) O administrador da carteira de ações recebe um bônus de b reais por cada fração de 0,5% que é ultrapassada na taxa de crescimento semanal. Determine o bônus médio por ação.

..../PROB/MN045039.TEX

2) Sejam $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,1)$ independentes. Mostre que $Z = \sqrt{-2\ln(X)}\cos(2\pi Y)$ e $W = \sqrt{-2\ln(X)}\mathtt{sen}(2\pi Y)$ são $N(0,1)$ independentes.

..../PROB/CP06011A.TEX

3) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente.

a) Mostrar que a distribuição de $Z = X + Y$ é Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$).

b) Mostrar que a distribuição de X, dado que $X + Y = n$ é $Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

..../PROB/CP08001A.TEX

4) Suponha que no ENEM a nota em cada área $X_i, i = 1,2,3,4$ tenha média 500 e desvio-padrão 100. Cada curso ou instituição pode definir pesos α_i e construir a Nota Geral por $NG = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Supondo que a correlação entre as notas X_i de cada par de áreas é ρ, obtenha:

a) as expressões para a média e o desvio-padrão da Nota Geral.

b) os valores quando $\alpha_i = 1/4, i = 1,2,3,4$ e $\rho = 0.5$.

..../PROB/CP107.TEX

5) Suponha que (X, Y) tenha a seguinte distribuição conjunta:

X / Y	-1	0	1	Total
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Total	3/8	2/8	3/8	1,0

a) Mostre que $E(XY) = E(X)E(Y)$ e, consequentemente, $\rho_{XY} = 0$.

b) Mostre que X e Y não são independentes.

..../PROB/CP93.TEX

6) Considere que a variável X segue o modelo Laplace (ou Exponencial Duplo), isto é, sua densidade é dada por $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, com $\lambda > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$. Determine a média e a variância de X.

..../PROB/MN052003.TEX

7) Sejam X_1, X_2 e X_3 independentes e com distribuição $Exp(1)$. Determine a média e a variância da variável $(X_1 + X_2)X_3$.

..../PROB/MN052005b.TEX

8) Seja (X, Y) Normal Bivariada. Mostre que X e Y são independentes, se, e somente se, forem não correlacionadas.

..../PROB/MN052009.TEX

9) Para uma função f qualquer, podemos estimar a integral $M = \int_0^1 f(x)dx$ utilizando o estimador $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$, em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, segundo o modelo Uniforme no intervalo $(0, 1)$. Mostre que temos:

a) $E(T) = M$

b) $Var(T) = \frac{1}{n}\int_0^1 (f(x) - M)^2 dx$.

..../PROB/MN056008.TEX

10) Uma partícula está na origem e faz movimentos de acordo com a regra descrita a seguir. A cada etapa ela pode mover a unidades para a direita com probabilidade p, ou b unidades para a esquerda com probabilidade $1-p$. Os vários movimentos são independentes. Determine o valor esperado da posição da partícula, em relação à origem, após n etapas.

..../PROB/MN045033.tex

!!!!! Boa prova !!!!!