Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME)

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 3**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

*********************************** **Atenção:** **
i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos
1 2 3 4 5 6 7 8
ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento
iii) A prova é estritamente individual e sem consulta.
****

1) Suponha que X e Y são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para k_1 e k_2 positivos, determine $P(k_1X - k_2Y > 0)$.

..../PROB/CP231b.TEX

2) Considere o conjunto $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F_X. Seja $Y_1 = min\{X_i\}$ e $Y_n = max\{X_i\}$. Mostre que:
(a) $F_{Y_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z)))^n$
(b) $F_{Y_n}(z) = (F_X(z))^n$
(c) Obtenha F_{Y_1} quando $X_i \sim Geo(p), \forall i$

..../PROB/MN0300XX.tex

3) Sejam $X \sim U_c(-1,1)$ e $Y = 2X^2$. Determine os valores esperados de X, Y e XY. O que dizer da independência entre X e Y?
Obs. $X \perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall (x,y)$

..../PROB/MN045025c.TEX

4) Suponha que no ENEM a nota em cada área $X_i, i = 1,2,3,4$ tenha média 500 e desvio-padrão 100. Cada curso ou instituição pode definir pesos α_i e construir a Nota Geral por $NG = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_4X_4$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$. Supondo que a correlação entre as notas X_i de cada par de áreas é ρ, obtenha:
a) as expressões para a média e o desvio-padrão da Nota Geral.
b) os valores quando $\alpha_i = 1/4, i = 1,2,3,4$ e $\rho = 0.5$.

..../PROB/CP107.TEX

5) Para uma função f qualquer, podemos estimar a integral $M = \int_0^1 f(x)dx$ utilizando o estimador $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$, em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, segundo o modelo Uniforme no intervalo $(0,1)$. Mostre que temos:
a) $E(T) = M$
b) $Var(T) = \frac{1}{n}\int_0^1 (f(x) - M)^2dx$.

..../PROB/MN056008.TEX

6) Sejam $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,1)$ independentes. Mostre que $Z = (X+Y)/\sqrt{2}$ e $W = (X-Y)/\sqrt{2}$ são $N(0,1)$ independentes (**Método do Jacobiano**).
Obs. $X \perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall (x,y)$

..../PROB/CP06012c.TEX

7) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \qquad x \geq a$.
a) Obtenha $g_X(t) = E(e^{tX})$, com $t \in \mathbb{R}$
b) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.
Obs: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

..../PROB/CP24B.TEX

8) A variável aleatória X segue o modelo de *Weibull*, isto é, sua densidade é dada por $f(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha} \times I_{0,\infty}(x), \alpha, \lambda > 0$. Obtenha a média de X.

..../PROB/MN042007.tex

!!!!! Boa prova !!!!!