Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME)

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 3**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

*********************************** **Atenção:** **

i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento

iii) A prova é estritamente individual e sem consulta.

****

1) Prove os seguintes resultados:

(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$

(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(3) Generalize para uma soma qualquer: sejam X_i v.a. independentes com fgm dadas por $M_i, i = 1, \cdots, n$. Então se $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, teremos que $M_Z(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_n(t) = \prod_{i=1}^{n} M_i(t)$. Se, adicionalmente, as X_i são identicamente distribuídas, teremos que $M_Z(t) = [M_1(t)]^n$.

..../PROB/CP103B.TEX

2) No PSS da UFPA a nota em cada disciplina X_i tinha média 500 e desvio-padrão 100. Na Fase 1 tínhamos $n = 11$ disciplinas. Supondo que a correlação entre cada par de disciplinas é 0,5, obtenha a média e o desvio-padrão da Nota Padronhizada da Fase 1 (NP1), dada por $NP1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

..../PROB/CP105.TEX

3) Suponha que X e Y são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para $k > 0$, determine $P(kX - Y > 0)$ usando:

a) um método convencional

b) por condicionamento, ou seja, $P(kX - Y > 0) = \int_0^\infty P(kX - Y > 0|Y = y) f_Y(y)dy$

..../PROB/CP231.TEX

4) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \qquad x \geq a$.

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP24.TEX

5) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

..../PROB/CP74.TEX

6) Sejam as v.a. $X_1, \cdots, X_n$ independentes e exponenciais com parâmetros $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, respectivamente.

i) Mostre que a distribuição de $Y = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ é exponencial. Qual o parâmetro?

ii) Prove que para $k = 1, \cdots, n$, $P(X_k = \min_{1\leq i\leq n} X_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$

(**Sugestão:** X_k e $\min_{i\neq k} X_i$ são independentes e, pelo item (i), exponenciais. Considere o evento $[X_k < \min_{i\neq k} X_i]$)

..../PROB/PROB5.TEX

7) Sejam X e Y vaiid $\sim N(0, 1)$. Provar que $U = X + Y$ e $V = X - Y$ são independentes e achar suas distribuições usando:

a) Método do jacobiano.

b) Método da Função Geradora de Momentos.

..../PROB/PROB6C.TEX

8) Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a. com distribuição Poisson com parâmetros $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivamente.

   i) Mostre que $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$

   ii) Use indução para mostrar que $X_1 + \cdots + X_n \sim Poisson(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$

..../PROB/PROB8.TEX

9) Duas câmeras de vídeo funcionam, de forma independente, monitorando a segurança da portaria de um prédio residencial. Admita que o tempo até acontecer uma falha na câmera é Exponencial, com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, para as câmeras 1 e 2. Supondo que ambas as câmeras iniciaram suas atividades no instante zero, obtenha o valor esperado do instante a partir do qual não haverá câmera em operação na portaria.

..../PROB/MN045019.TEX

10) Sejam $X\ U_c(-2, 2)$ e $Y = X^2$. Determine o valor esperado de X, Y e XY. Que dizer da independência entre X e Y?

..../PROB/MN045025.TEX

!!!!! Boa prova !!!!!