Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Mestrado em Matemática e Estatística

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 4 (Substitui a menor nota)**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

************************************ **Atenção:** **
i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
i) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento
ii) A Prova é individual e sem consulta.
****

1) Considere que as variáveis X e $Y \sim N(0,1)$, independentes. Defina as variáveis $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.
a) Obtenha as densidades conjuntas de Z e W.
b) Z e W são independentes?

..../CP/CP236.TEX

2) Suponha que a Nota Final em uma prova de vestibular é obtida pela Média Aritmética das notas de 10 disciplinas, ou seja, $NF = (N_1 + N_2 + \cdots + N_{10})/10$, sendo $\mu = 500$ a média e $\sigma = 100$ o desvio-padrão em cada disciplina. Suponha ainda que a correlação é a mesma entre cada par de disciplinas, dada por $\rho = 0,4$. Qual será a média e o desvio-padrão da Nota Final?

..../CP/CP504.TEX

3) Indique, sem fazer os cálculos, como são construídas as seguintes variáveis:
(a) $Gamma(n, \lambda)$
(b) $Qui - quadrado$ com n graus de liberdade
(c) $t - Student$ com n graus de liberdade
(e) $F - Snedecor$ com n e m graus de liberdade.

.... CP500.tex

4) Seja X uma variável aleatória discreta com $P(X = n) = 1/2^n, n = 1, 2, \cdots$. Defina $Y = g(X)$, em que $g(n) = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}2^n$. Mostre que $E(Y)$ não existe.

.... CPMN45034.tex

5) Prove os seguintes resultados:
(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$
(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

..../CP/CP103.TEX

6) Para uma função f qualquer, podemos estimar a integral $M = \int_a^b f(x)dx$ utilizando o estimador $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)$, em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, segundo o modelo Uniforme no intervalo (a, b). Mostre que temos $E(T) = M$ e $Var(T) = \frac{1}{n}\int_a^b (f(x) - M)^2 dx$.

.... CPMN56008b.tex

7) Seja X uma variável aleatória com $E(X^n)$ abaixo. Determine a função geradora de momentos de X (informando o intervalo de t em que M_X existe) e identifique sua distribuição.

(a) $E(X^n) = n!$ (b) $E(X^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!}, & n \text{ par} \\ 0, & c.c. \end{cases}$

Obs: Usando Expansão de Taylor, podemos escrever $M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} E(X^n)\frac{t^n}{n!}$.

.... CPMN56051.tex

8) Numa rodovia, o número de acidentes por semana tem distribuição de Poisson de parâmetro α. Em cada acidente, o número de feridos tem distribuição de Poisson de parâmetro β. Assuma independência entre o número de acidentes e o número de feridos por acidente. Obtenha o número médio de feridos por semana.

.... CPMN56027.tex

9) Sendo X e Y v.a. com distribuição $N(0,1)$, independentes, calcule a função geradora de momentos de $W = \frac{1}{2}(X-Y)^2$ e identifique sua distribuição.

.... CPMN54006.tex

10) Um sistema complexo é constituído de 100 componentes que funcionam independentemente. A probabilidade de que qualquer um dos componentes venha a falhar durante o período de operação é igual a 0,10. A fim de que o sistema completo funcione, pelo menos 85 dos componentes devem funcionar perfeitamente.

a) Informe a distribuição da v.a. X a ser considerada e calcule a probabilidade de que o sistema não falhe.

b) Use a aproximação: $P(X \geq x) = P(Z > (x-\mu)/\sigma)$, onde $Z \sim N(0,1)$, com μ e σ sendo a média e o desvio-padrão de X e compare com o resultado anterior.

..../CP/CP302.TEX

!!!!! Boa prova !!!!!