Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Mestrado em Matemática e Estatística

Disciplina: Probabilidade **Prova n^o: 3**
Professor: Héliton Ribeiro Tavares

Nome: ______________________________ **Matrícula:** ______________

********************************* **Atenção:** ***************************************
i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos
1 2 3 4 5 6 7 8
i) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento
ii) A Prova é individual e sem consulta.
****

1) Sendo $X \sim \chi(m)$ e $Y \sim \chi(n)$, independentes, e $W = \frac{X/m}{Y/n}$:
   a) Verifique que W segue o modelo $F - Snedecor$ com m e n graus de liberdade.
   b) Qual seria a distribuição de W^{-1}
   c) Mostre que $\frac{\frac{m}{n}W}{1+\frac{m}{n}X}$ tem distribuição *Beta*.

   .... CPMN34056.tex

2) Considere $X_1, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $Exp(\lambda_i)$, $i = 1, \cdots, n$.
   a) Verifique que $Y_1 = \min(X_1, \cdots, X_n)$ é $Exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$
   b) Mostre que $P(X_k = \min(X_1, \cdots, X_n)) = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$
   c) Calcule a função de distribuição de $Y_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$

   .... CPMN34057.tex

3) Seja X uma variável aleatória discreta com $P(X = n) = 1/2^n, n = 1, 2, \cdots$. Defina $Y = g(X)$, em que $g(n) = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}2^n$. Mostre que $E(X)$ não existe.

   .... CPMN45034.tex

4) As variáveis aleatórias $X_1, \cdots, X_n$ formam uma amostra aleatória (v.a.i.i.d.) da densidade $f(x) = \alpha x^{\alpha-1} I_{(0,1)}(x)$, $\alpha > 0$. Determine o valor esperado de Y_1/Y_n, sendo que Y_1 e Y_n são o mínimo e o máximo da amostra, respectivamente.

   .... CPMN45037.tex

5) Sejam $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$, independentes. Obtenha a distribuição de X dado que $X + Y = n$. Qual a média desta distribuição?

   .... CPXX100.tex

6) Para estimar a integral $M = \int_0^1 f(x)dx$ utiliza-se o estimador $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, em que $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, segundo o modelo Uniforme no intervalo (0,1). Mostre que temos $E(T) = M$ e $Var(T) = \frac{1}{n}\int_0^1 (f(x) - M)^2 dx$.

   .... CPMN56008.tex

7) Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias e identicamente distribuídas. Seja N uma outra variável, independente das $X_i's$ e com valores inteiros não negativos. Determine a média e a variância de $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

   .... CPMN56026.tex

8) Sendo (X, Y) uma Normal Bivariada, obtenha sua função geradora de momentos conjunta. A partir desse resultado, obtenha $E(XY)$.

   .... CPMN56046.tex

!!!!! Boa prova !!!!!