Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Mestrado em Matemática e Estatística (PPGME)

****

EXERCÍCIOSS DE PROBABILIDADE

****

1) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 2$.

Y/X	0	1	2	Total
0	0,714	0,133	0,004	0,851
1	0,133	0,012	0	0,145
2	0,004	0	0	0,004
Total	0,851	0,145	0,004	1,00

..../PROB/CP03010A.tex

2) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 0$.

c) Verifique se X e Y são independentes.

Y/X	0	1	2
0	0,714	0,133	0,004
1	0,133	0,012	0
2	0,004	0	0

..../PROB/CP03010B.tex

3) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 0$.

Y/X	0	1	2
0	0,714	0,133	0,004
1	0,133	0,012	0
2	0,004	0	0

..../PROB/CP03010C.tex

4) Seja $X \sim N(0,1)$. Obtenha a fdp de X^2.

..../PROB/CP040.tex

5) Seja X uma v.a. com distribuição $U(0,1)$. Mostre que:

a) $Y = (b-a)X + a$ tem distribuição $U(a,b)$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ tem distribuição $Exp(\lambda)$

..../PROB/CP05001A.TEX

6) Seja X uma v.a. com distribuição $U(0,1)$. Mostre, usando o **Método do Jacobiano**, que:

a) $Y = (b-a)X + a$ tem distribuição $U(a,b)$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ tem distribuição $Exp(\lambda)$

..../PROB/CP05001B.tex

7) Seja X uma v.a. com distribuição $U(0,1)$. Mostre, usando o **Método do Jacobiano**, que:

a) $Y = (b-a)X + a$ tem distribuição $U(a,b)$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ tem distribuição $Exp(\lambda)$

Obs: Método do Jacobiano: $f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

..../PROB/CP05001C.tex

8) Suponha que a velocidade V de um objeto tenha distribuição $N(0,1)$. Seja $K = mV^2/2$ a eneergia cinética do objeto. Encontre a fdp de K.

..../PROB/CP050020A.TEX

9) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Exponencial(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Normal(μ,σ^2) e) Poisson(λ) f) Binomial Negativa (r,p).

..../PROB/CP05002E.TEX

10) Calcule a Esperança e a Variância da variável aleatória X nos seguintes casos:

(a) $X \sim Poisson(\lambda)$; (b) Normal (μ,σ^2).

..../PROB/CP05003B.TEX

11) Considerando a distribuição $N(0,1)$:

a) Qual o valor máximo que a função de densidade assume?

b) Ele é de fato uma função de densidade? [dica: verifique que $f(x) \geq 0, \forall x$ e que sua integral é 1.]

..../PROB/CP05005A.TEX

12) Seja X uma v.a. qualquer com média μ_X e variância σ_X^2, e $Y = aX + b$, onde a e b são duas constantes quaisquer. Mostre que a Esperança e a Variância de Y podem ser obtidas por

a) $E(Y) = a\mu_X + b$

b) $Var(Y) = a^2\sigma_X^2$.

..../PROB/CP05010A.TEX

13) Suponha que a duração de um certo tipo de lâmpada depois de instalada distribui-se, exponencialmente, com duração média de 20 dias. Quando uma lâmpada queima, instala-se outra do mesmo tipo em seu lugar. Obtenha a probabilidade de que sejam necessárias mais de 40 lâmpadas durante o período de um ano.

..../PROB/CP05015B.TEX

14) Suponha que a velocidade V de um objeto tenha dsitribuição $N(0,1)$. Seja $K = mV^2/2$ a energia cinética do objeto. Encontre a fdp de K.

..../PROB/CP05020A.tex

15) Considere que você tem um conjunto de observações $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de uma v.a. X com média μ e variância σ^2.

a) O que você pode pode afirmar sobre a distribuição amostral da média $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$?

b) Agora considere que X tem distribuição $Bernoulli(p)$. O que se pode afirmar sobre a distribuição amostral da proporção $\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$?

..../PROB/CP05025A.TEX

16) Suponha que a variável aleatória (X,Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $P(0 < X < 1, \quad 1 < Y < 2)$

b) Desenhe a região $B = \{X > Y\} = \{(x, y) : x > y\}$

c) Calcule $P(X > Y)$

..../PROB/cp05030.tex

17) Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Verifique que integra 1

b) Desenhe a região $B = \{X + Y \geq 1\}$

c) Calcule $P(X + Y \geq 1)$

..../PROB/cp05031.tex

18) Dois característicos do desenpenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória com f.d.p conjunta dada por:

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy), \quad 0 \leq x \leq 1 \;\; 0 \leq y \leq 1$$

Encontrar as f.d.p's marginais de X e Y.

..../PROB/cp05032.tex

19) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

..../PROB/cp05033.tex

20) Admita que um inseto ponha ovos segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro 5 e que a probabilidade de que um ovo dê origem a um novo inseto seja 0,7. Admitimos que os ovos produzam novos insetos de maneira independente, encontre o número esperado de novos insetos gerados pelo inseto.

..../PROB/CP060010A.TEX

21) Sejam $X \sim U(0, 1)$ e $Y \sim U(0, 1)$ independentes. Mostre que $Z = \sqrt{-2\ln(X)}\cos(2\pi Y)$ e $W = \sqrt{-2\ln(X)}\mathtt{sen}(2\pi Y)$ são $N(0, 1)$ independentes.

..../PROB/CP06011A.TEX

22) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ independentes. Mostre que $Z = X + Y$ e $W = X - Y$ são $N(0, 2)$ independentes (**Método do Jacobiano**).

..../PROB/CP06012A.TEX

23) Sejam X_1, X_2 e X_3 v.a. independentes com distribuição $N(0, 1)$ e $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $Y_2 = X_1 - X_2$ e $Y_3 = X_1 - X_3$. Obter a densidade conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3) via Método do Jacobiano.

..../PROB/CP06013A.tex

24) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's independentes. Suponha que $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que a v.a $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

..../PROB/CP06014A.tex

25) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_1 e α_2, respectivamente.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2$.

b) Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

..../PROB/CP06015A.tex

26) Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros $\alpha_i,\ i = 1, \cdots, n$.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

b) Calcule $P(X_1 < X_2)$.

..../PROB/CP06015B.tex

27) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o máximo dos dois resultados e Y a soma dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{(X, Y)}$.

..../PROB/CP06016.tex

28) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o máximo dos dois resultados e Y a diferença dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{(X, Y)}$.

..../PROB/CP06016b.tex

29) Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-(2x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $P(0 < X < 2, \quad 0 < Y < 3)$

b) Desenhe a região $B = \{X > 2Y\} = \{(x, y) : x > 2y\}$

c) Calcule $P(X > 2Y)$

..../PROB/CP06017.tex

30) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

..../PROB/CP06018.tex

31) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais de X e Y, e condicionais de $X|(Y = y)$ e $Y|(X = x)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq x.$$

..../PROB/CP06019.tex

32) Considere a fdp a seguir:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Obtenha a Função de Distribuição Conjunta de (X, Y)

b) Derive-a de forma a obter a densidade novamente.

..../PROB/CP06020.tex

33) Sejam X e Y v.a's independentes, cada uma tendo distribuição Uniforme no intervalo $(0, 1)$. Seja $Z = X + Y$. Encontre a f.d.p de Z pelo Método do Jacobiano.

..../PROB/CP07001A.tex

34) Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua f.d.p conjunta seja dada pela função abaixo. Verifique se $Xe\ Y$ são independentes.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-(2x+y)} \quad ; \ x \geq 0, \ \ y \geq 0.$$

..../PROB/cp07002.tex

35) A tabela a seguir dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y), referente ao número de peças produzidas por duas linhas de prodção.

Y\X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	$\boxed{0{,}01}$	$\boxed{0{,}03}$	$\boxed{0{,}05}$	$\boxed{0{,}07}$	$\boxed{0{,}09}$	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1,00

Encontre a distribuição de probabilidade das seguintes v.a's:

$U =$ mín $(X, Y) =$ menor nº de peças produzidas pelas duas linhas.

$V =$ máx$(X, Y) =$ maior nº de peças produziadas pelas duas linhas.

$W = X + Y =$ nº total de peças produzidas pelas duas linhas.

..../PROB/cp07003.tex

36) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Bin(n_1, p) e Bin(n_2, p), respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

..../PROB/cp07004.tex

37) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

..../PROB/cp07005.tex

38) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$, independentes, qual a distribuição de $Z = X + Y$?

..../PROB/cp07006.tex

39) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$, independentes, qual a distribuição de $Z = X + 2Y$?

..../PROB/cp07006b.tex

40) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$, independentes, qual a distribuição de $Z = 3(X + 2Y)$?

..../PROB/cp07006C.tex

41) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente.

a) Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

b) Determinar a distribuição condicional de X dado que $Z = n$.

..../PROB/cp07007.tex

42) Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y|(X = x) \sim Bin(x, p)$. Mostre que,

a) A distribuição de Y é $Poisson(\lambda p)$.

b) A distribuição condicional de $X|(Y = y)$ é $\mathcal{P}oisson(\lambda(1 - p))$.

..../PROB/CP07008.tex

43) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente.

a) Mostrar que a distribuição de $Z = X + Y$ é Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b) Mostrar que a distribuição de X, dado que $X + Y = n$ é $Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

..../PROB/CP08001A.tex

44) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Bin(n_1, p) e Bin(n_2, p), respectivamente.

a) Mostrar que a distribuição de $Z = X + Y$ é Bin$(n_1 + n_2, p)$.

b) Mostrar que a distribuição de X, dado que $X + Y = m$ é Hipergeométrica. Ou seja,

$$P(X = k|X + Y = m) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-n}}{\binom{2n}{m}}.$$

..../PROB/CP08002A.tex

45) Sendo X uma v.a. qualquer, a funÃ§Ã£o $M_X(t) = E(e^{tX})$ Ã© denominana *FunÃ§Ã£o Geradora de Momentos* de X avaliada no ponto $t \in (-\infty, infty)$.

..../PROB/CP08003.tex

46) Demonstre que se ρ_{XY} é o coeficiente de correlação entre X e Y, então $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

..../PROB/CP09001A.tex

47) Demonstre que se ρ_{XY} é o coeficiente de correlação entre X e Y, então $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Obs: $\rho_{X,Y} = Cov\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

..../PROB/CP09001B.tex

48) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p)
b) Poisson(λ)
c) Geométrica(p)
d) Exponencial(λ)
e) Normal(μ, σ^2)

..../PROB/CP1.tex

49) Uma Empresa produz barras de comprimento especificado, mas com certa aleatoriedade no comprimento. Admita-se que o comprimento real X (polegada) seja uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre [9,12]. Suponha-se que somente interesse saber se um dos três eventos (tipos) seguinte terá ocorrido: $A_1 = \{X < 9,5\}, \quad A_2 = \{9,5 \leq X \leq 11,5\} \quad e \quad A_3 = \{X > 11,5\}$. Determine a probabilidade de que entre 10 barras produzidas tenhamos duas do Tipo 1, duas do Tipo 3 e as demais do Tipo 2.

..../PROB/CP10001A.tex

50) Sejam $X \sim N(0,9)$ e $Y = \chi^2_{25}$ v.a's independentes. Usando apenas a definição[1] da variável t, encontre k tal que a distribuição da v.a $U = k\frac{X}{\sqrt{Y}}$ seja t-Student com 25 graus de liberdade.

[1] Teorema 30, página 171

..../PROB/CP10002A.tex

51) Sejam $X_k \sim \chi^2_k$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Obtenha a distribuição da v.a $W = \frac{X_2+X_3+X_4}{9X_1}$
b) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

..../PROB/CP10003A.tex

52) Sejam $X_k \sim \chi^2_{2k}$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Encontre k tal que a distribuição da v.a. $W = k\left(\frac{X_2+X_3+X_4}{X_1}\right)$ seja F-Snedecor, e informe o grau de liberdade.
b) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

..../PROB/CP10003B.tex

53) Sejam $X_k \sim \chi^2_{2k}$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Quais são as distribuições de X_1, X_2 e X_3?
b) Usando apenas a definição[2] da variável F, encontre k tal que a distribuição da v.a. $W = k\left(\frac{X_2+X_3+X_4}{X_1}\right)$ seja F-Snedecor, e informe o grau de liberdade.
c) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

[2] Teorema 32, página 172.

..../PROB/CP10003C.tex

54) Para os casos abaixo, informe (não precisar fazer as contas) qual a FGM:

(i) Binomial (n,p) (ii) Geométrica(p) (iii) Poisson(λ)
(iv) Uniforme(a,b) (v) Exponencial(λ) (vi) Normal(μ, σ^2).

..../PROB/CP101.tex

55) Calcule a Função Geradra de Momentos (FGM) da v.a. X quando a distribuição de X é (i) Poisson(λ) e (ii) Normal(μ, σ^2). Use-as para obter a média e a variância nos dois casos.

..../PROB/CP102.tex

56) Prove os seguintes resultados:

(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$

(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

..../PROB/cp103.tex

57) Prove os seguintes resultados:

(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$

(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

(3) Generalize para uma soma qualquer: sejam X_i v.a. independentes com fgm dadas por $M_i, i = 1, \cdots, n$. Então se $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, teremos que $M_Z(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_n(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$. Se, adicionalmente, as X_i são identicamente distribuídas, teremos que $M_Z(t) = [M_1(t)]^n$.

..../PROB/cp103B.tex

58) Prove os seguintes resultados:

..../PROB/cp104.tex

59) No PSS da UFPA a nota em cada disciplina X_i tinha média 500 e desvio-padrão 100. Na Fase 1 tínhamos $n = 11$ disciplinas. Supondo que a correlação entre cada par de disciplinas é 0,5, obtenha a média e o desvio-padrão da Nota Padronhizada da Fase 1 (NP1), dada por $NP1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

..../PROB/CP105.tex

60) Qual o valor máximo da função de probabilidade/densidade nos seguintes casos:

a) Binomial(n, p)   b) N(0,1)

..../PROB/CP106.tex

61) Consideremos que o fato de chover ou não amanhã dependa de se choveu ou não nos últimos três dias (hoje, ontem e anteontem).

(a) Este sistema pode ser

..../PROB/CP11.TEX

62) Suponha que a duração da vida de uma peça seja exponencialmente distribuída, com média 3. Suponha que 10 dessas peças sejam instaladas sucessivamente, de modo que a i-ésima peça seja instalada imediatamente depois que a ordem $(i-1)$ tenha falhado. Seja T_i a duração até falhar da i-ésima peça, $i = 1, 2, \ldots, 10$, sempre medida a partir do instante de instalação. Portanto, $S_{10} = T_1 + \ldots + T_{10}$ representa o tempo total de funcionamento das 10 peças. Admitindo que os T_i sejam independentes, calcule $P(S_{10} \geq 20)$.

..../PROB/cp11001A.tex

63) Suponha que X e Y são duas v.a.'s tais que $\rho_{XY} = 1/2$, $Var(X) = 1$ e $Var(Y) = 2$. Obtenha $Var(X - 2Y)$.

..../PROB/CP113.TEX

64) Suponha que X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ sejam observações (v.a's) independentes, cada uma delas tendo distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,05$. Faça $S = X_1 + \cdots + X_n$. Use $n = 30$.

a) Empregando o Teorema Central do Limite, calcule $P(S \geq 4)$.

b) Compare a resposta de (a) com o valor exato dessa probabilidade.

..../PROB/CP12001A.tex

65) Um sistema complexo é constituído de n componentes que funcionam independentemente. A probabilidade de que qualquer um dos componentes venha a falhar durante o período de operação é igual a r. A fim de que o sistema completo funcione, pelo menos 95 dos componentes devem funcionar perfeitamente. Usando $n = 100$ e $r = 0,15$, calcule a probabilidade de que isso aconteça.

..../PROB/CP12002A.tex

66) Suponha que o sistema do Exercício 65 seja constituído de n componentes cada um deles tendo uma confiabilidade de 0,85. O sistema funcionará se ao menos 80 por cento dos componentes funcionarem adequadamente. Determine n de maneira que o sistema tenha uma confiabilidade de 0,95.

..../PROB/CP12003A.tex

67) Seja $X \sim B(10; 0,4)$. Obter $P(X \geq 6)$ e $P(X < 4)$ utilizando a correção de continuidade.

..../PROB/CP12004A.tex

68) Suponha que a proporção de fumantes de uma população seja p, desconhecida. Queremos determinar p com um erro de, no máximo, $0,03$. Qual deve ser o tamanho da amostra n a ser escolhida com reposição, se $\gamma = 0,90$?

..../PROB/CP12005A.tex

69) Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e 2 pretas. Extrai-se uma amostra de duas bolas sem reposição. Sejam U e V os números de bolas vermelhas e pretas, respectivamente, na amostra. Determine:

a) ρ_{uv} b) $E(U|V = 1)$ c) $Var(U|V = 1)$

..../PROB/CP123.TEX

70) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_1 e α_2, respectivamente.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2$.

b) Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

..../PROB/CP13.TEX

71) Suponha que $X \sim Poisson(\lambda)$. Use a desigualdade de Tchebycheff para verificar as seguintes desigualdades:

a) $P\left[X \leq \frac{\lambda}{2}\right] \leq \frac{4}{\lambda}$ b) $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

..../PROB/CP143.TEX

72) Suponha que a duração de um certo tipo de lâmpada depois de instalada distribui-se, exponencialmente, com duração média de 10 dias. Quando uma lâmpada queima, instala-se outra do mesmo tipo em seu lugar. Obtenha a probabilidade de que sejam necessárias mais de 50 lâmpadas durante o período de um ano.

..../PROB/CP15.TEX

73) Um fabricante de parafusos sabe que 5% de sua produção é defeituosa. Ele oferece uma garantia sobre sua remessa de 10.000 itens, prometendo reembolsar o dinheiro se mais de a parafusos forem defeituosos. Qual o menor valor que o fabricante pode atribuir a a e ainda continuar seguro de que não precisa reembolsar o dinheiro em mais de 1% das vezes?

..../PROB/CP153.TEX

74) Em um programa de TV o apresentador mostra-lhe três portas iguais. Por trás de uma delas está um maravilhoso e cintilante carro. Por trás de cada uma das outras está uma cabra. O objectivo do jogo é que o leitor escolha uma das portas, ganhando o prémio que ela esconde. O apresentador começa por lhe pedir que escolha uma das três portas. O apresentador (que sabe onde está o carro) abre uma das duas portas não escolhidas, revelando uma cabra. Em seguida, vira-se para si e dá-lhe a possibilidade de trocar a sua escolha da porta inicial para a outra porta ainda fechada. O que é que lhe é mais vantajoso ? Trocar de portas ou manter a escolha inicial ? Ou é indiferente ? Justifique sua resposta.

..../PROB/CP1a.tex

75) Sua mãe costuma jogar na Megasena, mas seus recursos só permitem jogar n bilhetes a cada ano. Ela lhe faz a seguinte pergunta: o que é melhor, jogar n cartões de uma única vez ou fazer uma aposta por vez até acabar os recursos?

..../PROB/CP1b.tex

76) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial
g) Exponencial(λ) h) Normal(μ, σ^2) $\chi(n)$, Gamma(α, β), $t - S$

..../PROB/CP1c.tex

77) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) i) Qui-Quadrado (n), j) $Gamma(\alpha, \beta)$, k) $t - Student$ (n),
l) $F - Snedecor(m, n)$.

..../PROB/CP1d.tex

78) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) .

..../PROB/CP1e.tex

79) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade, com seus parâmetros.

a) Binomial b) Poisson c) Geométrica
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Exponencial
g) Normal h) Bernoulli i) Uniforme.

..../PROB/CP1F.tex

80) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade e (iv) $E(X)$ e $Var(X)$.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) d) Uniforme(a, b)
e) Exponencial(λ) f) Normal(μ, σ^2) g) Qui-Quadrado (n) h) $Gamma(\alpha, \beta)$

..../PROB/CP1g.tex

81) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial
g) Exponencial(λ) h) Normal(μ, σ^2) $\chi(n)$, $Gamma(\alpha, \beta)$, $t - S$

..../PROB/CP1a2.tex

82) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) i) Qui-Quadrado (n), j) $Gamma(\alpha, \beta)$, k) $t - Student$ (n),
l) $F - Snedecor(m, n)$.

..../PROB/CP1d2.tex

83) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) .

..../PROB/CP1e2.tex

84) Seja X uma variável aleatória contínua, com fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1, \\ a & 1 \leq x \leq 2, \\ -ax + 3a & 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

(i) Determine a constante a; (ii) esboce o gráfico da F (Função de Distribuição Acumulada).

..../PROB/CP2.TEX

85) Prove as Leis de Morgan:

$$(i) \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \quad (ii) \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \right) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

..../PROB/CP201.tex

86) Discuta três possíveis interpretações para o problema a seguir, apresentando suas soluções: *"Num círculo unitário, o triângulo equilátero inscrito tem lado igual a* $\sqrt{3}$*. Qual é a probabilidade de uma corda desse círculo, escolhida ao acaso, ter comprimento maior que o lado desse triângulo."*

..../PROB/CP202.tex

87) São escritas cartas a n destinatários diferentes e há n envelopes com os respectivos endereços. Porém, as cartas são colocadas ao acaso em cada um desses envelopes.

a) Qual é a probabilidade da k-ésima carta chegar ao destino correto?

b) Qual é a probabilidade de pelo menos uma carta chegar ao destino correto?

c) O que ocorre com a probabilidade em (b) se $n \to \infty$?

..../PROB/CP203.tex

88) Exames de diagnóstico não são infalíveis, mas deseja-se que tenham probabilidade pequena de erro. Um exame detecta uma certa doença, caso ela exista, com probabilidade 0,9; se a doença não existir, o exame acerta isso com probabilidade de 0,8. Considere que estamos aplicando o teste em uma população com 10% de incidência dessa doença. Para um indivíduo escolhido ao acaso, pergunta-se:

a) A probabilidade de ser realmente doente se o exame indicou que era.

b) Se dois indivíduos forem escolhidos e testados, qual seria a probabilidade de errar um dos diagnósticos?

c) Suponha que o acerto do exame, nas duas soluções possíveis, tem a mesma probabilidade p. Qual deveria ser o valor de p para que a probabilidade calculada no item (a) seja de 0,9?

..../PROB/CP204.tex

89) Um carcereiro informa a três prisioneiros que um deles foi sorteado para ser solto no dia seguinte, enquanto os outros dois serão executados. O prisioneiro João se aproxima do carcereiro e cochicha no seu ouvido, solicitando que qual dos outros dois prisioneiros será executado. O prisioneiro argumenta que isso não altera em nada sua situação, visto que pelo menos um desses prisioneiros será executado. Entretanto, o carcereiro não atende a seu pedido, acreditando que isso poderia dar a João alterações nas suas expetativas de ser libertado. Você acha que o carcereiro tem razão:

..../PROB/CP205.tex

90) Suponha que uma impressora de alta velocidade cometa erros segundo um modeo Poisson, com uma taxa de 3 erros por página.

a) Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?

b) Se 5 páginas são sorteadas ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de encontrarmos pelo menos uma página com pelo menos 1 erro por página?

c) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos 1 erro. Você identifica o modelo dessa variável?

..../PROB/CP221.tex

91) Suponha que uma impressora de alta velocidade cometa erros segundo um modeo Poisson, com uma taxa de 3 erros por página.

a) Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?

b) Se 5 páginas são sorteadas ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de encontrarmos pelo menos uma página com pelo menos 1 erro por página?

c) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos 1 erro. Você identifica o modelo dessa variável?

d) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas até encontrarmos a segunda página com erro. Você identifica o modelo dessa variável?

..../PROB/CP221B.tex

92) Supondo que a expectativa de vida, em anos, seja uma v.a. $Exp(1/70)$

a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade viver pelo menos até os 80 anos;

b) Refaça o item (a), sabendo que o indivíduo tem mais de 50 anos;

c) Calcule o valor de m tal que $P(X > m) = 1/2$.

..../PROB/CP222.tex

93) Suponha que o volume, em litros, de uma garrafa de refrigerantes seja Normal com parâmetros $\mu = 2$ e $\sigma^2 = 0,0025$. Se 3 garrafas forem escolhidas ao acaso, pergunta-se a probabilidade de:

a) Todas as 3 terem pelo menos 1950 ml?

b) Não mais que uma ter conteúdo inferior a 1950 ml?

..../PROB/CP223.tex

94) Mostre que a taxa de falha $t(x) = f(x)/(1 - F(x))$, para $F(x) < 1$, é constante e coincidde com seu parâmetro. (Isso é usado em análise de confiabilidade de sistemas.)

..../PROB/CP224.tex

95) Determine as condições sobre as constantes c de modo que as expressões abaixo sejam funções de probabilidade:

a) $p(x) = c\alpha^x$, $\alpha \in (0,1)$ e $x = 0, 1, 2, ...$

b) $p(x) = (c-1)^{2x}$, $x = 1, 2, ...$

..../PROB/CP225.tex

96) Qual é o valor de k (inteiro) da v.a. X que tem probabilidade máxima, nos seguintes casos:

(a) $Bin(n,p)$ (b) $Poisson(\lambda)$

..../PROB/CP226.tex

97) Qual é o valor de x que tem probabilidade máxima, nos seguintes casos:

a) $Exp(\lambda)$

b) $Normal(\mu, \sigma^2)$

..../PROB/CP227.tex

98) Seja X uma v.a. com Função de Distribuição (FD) F_X. Considere $Y = f(X)$ e determine a FD F_Y das v.a.'s

(a) $-X$, (b) $|X|$, c) X^2 e d) $\sqrt{X}$

..../PROB/CP228.tex

99) Seja X uma v.a. com Função de Distribuição (FD) F_X. Determine a FD das v.a.'s Y definidas por

(a) $-X$, (b) $|X|$, (c) X^2 (d) $\sqrt{X}$ e (e) $\ln(1-X)^{-1}$, quando $X \sim U_c(0,1)$

..../PROB/CP228B.tex

100) Seja X uma v.a. $X \sim U_c(0,1)$. Determine as Funções de Distribuição (Acumulada) F's das v.a.'s Y abaixo. Para cada transformação Y, gere 1000 valores (dados) no R e compare a *Ogiva* (Frequência Acumuada Relativa) com as F's obtidas e discuta se estão próximas. Você seria capaz de propor uma medida para verificar se os dados estão próximos da distribuição teórica F?

(a) $-X$, (b) $|X|$, (c) X^2 (d) $\sqrt{X}$ e (e) $\ln(1-X)^{-1}$.

..../PROB/CP228C.tex

101) Considere X_1 e X_2 independentes com distribuição $Exp(\alpha)$.

a) Mostre que a v.a. $S = X_1 + X_2$ tem distribuição Gama$(2, \alpha)$.

b) Obtenha a densidade da v.a. $Z = Y/X$.

c) Qual a distribuição da v.a. $Z = \frac{X}{X+Y}$?

..../PROB/CP23.TEX

102) Suponha que X e Y são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para $k > 0$, determine $P(kX - Y > 0)$ usando:

a) um método convencional

b) por condicionamento, ou seja, $P(kX - Y > 0) = \int_0^\infty P(kX - Y > 0|Y = y) f_Y(y) dy$

..../PROB/cp231.tex

103) Sendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, apresente uma função de X que tenha distribuição Qui-quadrado com 1 grau de liberdade, usando: (a) O método direto e (b) o método do Jacobiano.

..../PROB/cp232.tex

104) Mostre que, sendo X e Y v.a. independentes com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, temos que

a) A soma $X + Y$ é Poisson.

b) A distribuição condicional de X dado $X + Y$ é binomial.

..../PROB/cp233.tex

105) Mostre que X e Y são v.a. independentes com distribuição Binomial de parâmetros (n_1, p_1) e (n_2, p_2), respectivamente, então:

a) Sob que condições a distribuição da soma $Z = X + Y$ também segue o modelo Binomial? Neste caso, quais os parâmetros de Z? (Mostre os cálculos!)

b) Verifique que a distribuição condicional de Y dado Z é Hipergeométrica.

..../PROB/cp234.tex

106) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes. Obtenha a distribuição de $Z = \min(X_1, X_2)$.

a) $X_i \sim Exp(\lambda_i), i = 1, 2$

b) $X_i \sim Geo(p), i = 1, 2$

..../PROB/cp235.tex

107) Considere que as variáveis X e $Y \sim N(0, 1)$, independentes. Defina as variáveis $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.

a) Obtenha as densidades conjuntas de Z e W.

b) Z e W são independentes?

..../PROB/cp236.tex

108) Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes Gama com parâmetros (n, λ) e (m, λ), respectivamente. Mostre que

a) $W = X_1/(X_1 + X_2)$ tem distribuição $Beta(n, m)$.

b) $T = X_1 + X_2$ tem distribuição $Gama(m + n, \lambda)$

c) T e W são independentes.

..../PROB/cp237.tex

109) Determine, usando apenas as definições das variáveis t e F, quais as distribuições W quando:

a) $X \sim N(0, 16)$ e $Y \sim \chi^2_{16}$ v.a's independentes, e $W = \frac{X}{\sqrt{Y}}$.

b) $X_k \sim \chi^2_k, k = 1, 2, 3$, v.a's independentes, e $W = \frac{5X_1}{X_2 + X_3}$

..../PROB/cp238.tex

110) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \qquad x \geq a$.

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP24.TEX

111) Arredonda-se 20 números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente em (-0,5; 0,5). Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3.

..../PROB/CP25.TEX

112) Arredonda-se 20 números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente em (-0,5; 0,5). Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3. (2,0 pontos)

..../PROB/cp25x.tex

113) Suponha que 5 por cento de todas as peças que saiam de uma linha de fabricação sejam defeituosas. Se 10 dessas peças forem escolhidas e inspecionadas, qual será a probabilidade de que no máximo 2 defeituosas sejam encontradas?

..../PROB/CP3.TEX

114) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Considere as seguintes v.a.'s: $W = X + Y$ e $Z = X - Y$. Mostre que a v.a. bidimensional contínua (W, Z) é uniformemente distribuída sobre o quadrado cujos vértices são (0,0), (1,1), (2,0) e (1, -1).

..../PROB/CP33.TEX

115) Seja X o resultado do lançamento de uma moeda honesta.

..../PROB/CP34.TEX

116) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = Cx \qquad\qquad 0 < x < 1,\;\; 0 < y < x^2$$

Calcule $E(Y|X)$ e $Var(Y|X)$.

..../PROB/cp35.tex

117) Sabe-se que 80% das peças produzidas por uma indústria passam por três testes de qualidade. Uma amostra de 200 peças é escolhida ao acaso da linha de produção. Qual é a probabilidade de que o número de peças na amostra que passam pelos três testes de qualidade esteja compreendido entre 154 e 170? (2,0 pontos)

..../PROB/cp35x.tex

118) Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis: 0,1,2,... Suponha que $P(X = j) = (1 - a)a^j$, j=0,1,2,... (a) Para que valores de a o modelo acima faz sentido? O que representa esse valor? (b) Verifique que essa expressão representa uma legítima expressão de probabilidade. Como ela é conhecida? (c) Mostre que para quaisquer dois inteiros s e t,

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t)$$

..../PROB/CP4.tex

119) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenha a densidade da v.a. $Z = X - Y$ e verifique que ela não depende de θ.

..../PROB/CP43.TEX

120) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenha a densidade da v.a. $Z = 2(X - Y)$ e verifique que ela não depende de θ.

..../PROB/CP43b.tex

121) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP44.TEX

122) Um dado é lançado 2.500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que a soma dos pontos obtidos seja menor que 8.850.

..../PROB/CP45.TEX

123) Um dado é lançado 2.500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que a soma dos pontos obtidos seja menor que 8.850. (2,0 pontos)

..../PROB/cp45x.tex

124) Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis: 0,1,2,... Suponha que $P(X = j) = (1-\alpha^2)\alpha^{2j}$, j=0,1,2,... (a) Para que valores de α o modelo acima faz sentido? O que representa esse valor? (b) Verifique que essa expressão representa uma legítima expressão de probabilidade. Como ela é conhecida? (c) Mostre que para quaisquer dois inteiros s e t,

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t)$$

..../PROB/CP4b.tex

125) Calcule a Esperança e a Variância da variável aleatória X nos seguintes casos:

(a) $X \sim Binomial(n,p)$; (b) Uniforme contínua (a,b); (c) Geométrica (p)

..../PROB/CP5.TEX

126) Admita que X e Y representem a duração da vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes. Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com fdp dadas por $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$ e $g(y) = 2e^{-2y} I_{(0,\infty)}(y)$. Obtenha a fdp da variável aleatória $X - Y$,

..../PROB/CP501.tex

127) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = X + Y$.

..../PROB/CP502.tex

128) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Geométrica de parâmetro comum p. Obtenha a função de probabilidade de $Z = X - Y$.

..../PROB/CP503.tex

129) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = 2X + Y$.

..../PROB/cp504.tex

130) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = 3X + Y$.

..../PROB/cp504b.tex

131) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = 4X + Y$.

..../PROB/CP504C.tex

132) Sejam X e Y v.a.'s independentes com as seguinte f.d.p.'s:

$$g(x) = \frac{8}{x^3}, \qquad x > 2 \qquad \text{e} \qquad h(y) = 2y, \qquad 0 < y < 1.$$

a) Obtenha a f.d.p. da v.a $Z = XY$.

b) Obtenha a $E(Z)$.

..../PROB/CP53.TEX

133) Seja X uma v.a. com distribuição geométrica de parâmetro p, ou seja, com f.p. dada por

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, ...$$

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP54.TEX

134) Sendo $X \sim t_{21}$, obtenha:

a) $P(X \leq 1,71)$

b) $P(X > 0,68)$

c) $P(X > -1,32)$

d) $P(1,32 < X < 2,49)$

e) $P(-0,68 \leq X \leq 1,32)$

..../PROB/cp55.tex

135) Suponha que a duração, em horas, de uma lâmpada especial tenha distribuição exponencial de parâmetro 1/3. Se uma amostra de 36 lâmpadas é observada, qual é a probabilidade de que a média amostral seja inferior a duas horas?

..../PROB/cp55x.tex

136) Seja $X \sim t_{25}$, calcule:

(a) $P(X \leq 1,7081)$, (b) $P(X > 0,6844)$ (c) $P(X > -1,3163)$

(d) $P(1,3163 < X < 2,4851)$ (e) $P(-0,6844 \leq X \leq 1,3163)$

..../PROB/cp56.tex

137) Seja $X \sim t_{25}$, encontre o valor de "a"tal que

(a) $P(X \leq a) = 0,975$, (b) $P(X > a) = 0,10$, (c) $P(|X| \leq a) = 0,90$, $P[-a \leq x \leq a] = 0,90$

..../PROB/cp57.tex

138) Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Use a desigualdade de Tchebyshev para obter:

(a) $P\left(X \leq \frac{\lambda}{2}\right) \leq \frac{4}{\lambda}$

(b) $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

..../PROB/cp58.tex

139) Considere um sequência de n experimentos de Bernoulli com probabilidade de sucesso p de ocorrer um evento A e $f_A = n_A/n$ a proporcão amostral de ocorrência de A. Use a desugualdade de Tchebyshev para justificar que

$P\,[\ |f_A - p\ | \geq \varepsilon\ ] \leq \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$

..../PROB/cp59.tex

140) Uma certa liga é formada pela reunião da mistura em fusão de dois metais. A liga resultante contém uma certa percentagem de chumbo X , que pode ser considerada uma variável aleatória. Suponha que X tenha a seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{3}{5} 10^{-5} x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que P, o lucro líquido obtido pela venda dessa liga (por libra), seja a seguinte função da percentagem de chumbo contida: $P = C_1 + C_2 X$. Calcule o lucro esperado (por libra).

..../PROB/CP6.tex

141) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição $N(0,1)$. Considere as seguintes v.a.'s: $W = X + Y$ e $Z = X - Y$. Determine a distribuição de W e Z e verifique que ela são independentes.

..../PROB/cp60.tex

142) Seja $X \sim \chi^2_{20}$, obtenha o valor de "a"tal que:

a) $P(X \leq a) = 0,10$
b) $P(X > a) = 0,95$
c) $P(X \leq a) = 0,99$
d) $P(X \geq a) = 0,025$

..../PROB/cp62.tex

143) Suponha que X e Y sejam v.a.'s tais que $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $Var(X) = \sigma^2_X$ e $Var(Y) = \sigma^2_Y$. Seja $Z = X/Y$, obtenha aproximações para $E(Z)$ e $Var(Z)$.

..../PROB/CP63.TEX

144) Sejam $X_i \sim \chi^2_{n_i}$, $i = 1, \cdots, k$, v.a.'s independentes. Usando a f.g.m., obtenha a distribuição da v.a. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

..../PROB/CP64.TEX

145) O Ministério da saúde deseja estimar a proporção de vítimas de uma certa moléstia no país. Determine o menor tamanho de amostra necessário para que a estimativa difira da verdadeira proporção por menos de 1% com probabilidade de 0,95 quando sabe-se que a verdadeira proporção de vítimas dessa moléstia no país é inferior a 0,10.

..../PROB/CP65.TEX

146) Suponha que X tenha distribuição Normal(2;0,16). Empregando a Tabela da distribuição Normal, calcule as probabilidades:
(a) $P(X > 2)$ (b) $P(X < -1)$ (c) $P(1,8 \leq X \leq 2,1)$

..../PROB/CP7.tex

147) Seja $X \sim \chi^2_{23}$, calcule:

a) $P(X \leq 11,689)$
b) $P(X \leq 38,076)$
C) $P(X > 18,137)$

..../PROB/cp72.tex

148) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(1,2)$. Seja $Z = X/Y$.

a) Obtenha aproximações para $E(Z)$ e $Var(Z)$.

b) Obtenha a f.d.p. de Z e, em seguida, os valores exatos para $E(Z)$ e $Var(Z)$. Compare com os resultados obtidos em a).

..../PROB/CP73.TEX

149) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

..../PROB/CP74.TEX

150) Seja $X \sim Gama(r, \alpha)$ e $Y = 2\alpha X$. Mostre que $Y \sim \chi^2_{2r}$,

..../PROB/CP74b.tex

151) Se 65% da população em uma comunidade é favorável à proposta de aumento nas mensalidades escolares, dê uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas desta comunidade irá conter:

a) pelo menos 50 pessoas favoráveis à proposta;

b) no máximo 75 pessoas favoráveis à proposta.

..../PROB/CP75.TEX

152) Se 65% da população em uma comunidade é favorável à proposta de aumento nas mensalidades escolares, dê uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas desta comunidade irá conter:

a) pelo menos 50 pessoas favoráveis à proposta; (1,0 ponto)

b) no máximo 75 pessoas favoráveis à proposta. (1,0 ponto)

..../PROB/cp75x.tex

153) Suponha que a duração da vida de dois componentes eletrônicos, D_1 e D_2 tenham distribuições $N(40, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se o dispositivo eletrônico tiver de ser usado por um período de 45 horas, qual dos dispositivos deverá ser preferido? E se fosse 48 horas?

..../PROB/CP8.tex

154) Suponha que a v.a. bidimensional contínua (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre a região $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Calcule ρ_{xy}.

..../PROB/CP83.TEX

155) Suponha que (X, Y)

..../PROB/cp83b.tex

156) Alguns resistores, R_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, são montados em série em um circuito. Suponha que a resistência de cada um seja normalmente distribuída, com $E(R_i) = 10$ ohms e $Var(R_i) = 0,16$.

a) Se $n = 5$, qual a probabilidade de que a resistência do circuito exceda 49 ohms ?

b) Que valor deverá ter n, para que se tenha probabilidade igual a 0,5 de que a resistência total exceda 100 ohms?

..../PROB/CP84.TEX

157) Sejam $X_1,\ X_2,\ \cdots$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) $U(0, 1)$, e seja $Y_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Prove que $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

..../PROB/CP85.TEX

158) Uma moeda perfeita é lançada 3 vezes. Sejam X o n^o de caras obtidas nos dois primeiros lançamentos e Y o n^o de caras obtidas no último lançamento. Obtenha:

a) A distribuição Conjunta de (X,Y).

b) As distribuições marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes?

..../PROB/CP9.teX

X / Y	-1	0	1	Total
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Total	3/8	2/8	3/8	1,0

159) Suponha que (X, Y) tenha a seguinte distribuição conjunta:

a) Mostre que $E(XY) = E(X)E(Y)$ e, consequentemente, $\rho_{xy} = 0$.

b) Mostre que X e Y não são independentes.

..../PROB/CP93.TEX

160) Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes com parâmetros (n, λ) e (m, λ), respectivamente. Mostre que

a) $W = X_1/(X_1 + X_2)$ tem distribuição $Beta(n, m)$.

b) $T = X_1 + X_2$ tem distribuição $Gama(m + n, \lambda)$

c) T e W são independentes.

..../PROB/HT006001.tex

161) Determine, usando apenas as definições das variáveis t e F, quais as distribuições W quando:

a) $X \sim N(0, 16)$ e $Y \sim \chi^2_{16}$ v.a's independentes, e $W = \frac{X}{\sqrt{Y}}$.

b) $X_k \sim \chi^2_k, k = 1, 2, 3$, v.a's independentes, e $W = \frac{5X_1}{X_2+X_3}$

..../PROB/HT006002.tex

162) A variável aleatória contínua bidimensional (X, Y) tem distribuição conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{4}; \quad para \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ \\ 0, \ caso \ \ contrario. \end{cases}$$

Determine,

(a) As distribuições marginais de X e Y;

(b) Se X e Y são independentes;

(c) A covariância entre X e Y (Obs: $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$).

..../PROB/HT04019.tex

163) Monte no Excel os gráficos das funções (densidades) $f(x)$ abaixo. Reserve a linha 1 da planilha para colocar os "nomes"dos coeficientes (parâmetros) da função e a linha 2 os seus valores. A partir da linha 4 (colunas A e B), coloque os valores de x e $f(x)$. As funções devem buscar os valores na linha 2, de forma que podemos mudar os parâmetros e observar a mudança na densidade. Cada função deve estar em uma Planilha (Plan1, Plan2,...)

a) $ax^2 + bx + c$, com $a = 1, \ b = -5, \ c = 6$.

b) $U(a, b)$, com $a = -1, \ b = 1$.

c) $N(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = 0, \ \sigma^2 = 1$.

d) Log-Normal $LN(\mu, \sigma^2)$, com $\mu = 1, \ \sigma^2 = 2$.

e) t-Student com k graus de liberdade (t_k), com $k = 5$.

f) Gamma com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 5$

g) Qui-quadrado com k graus de liberdade (χ^2_k), com $k = 5$.

h) Fisher-Snedecor com graus de liberdade n_1 e n_2 (F_{n_1,n_2}), com $n_1 = 3,\ n_2 = 5$.

i) $Beta(a, b)$, com $a = 3,\ b = 5$.

..../PROB/HT04029.tex

164) O Estatístico tem como uma de suas atribuições a modelagem de dados e a interação com outros profissionais. Um físico costuma realizar experimentos em laboratório ou simulação computacional no estudo de algum fenômeno, controlando algumas variáveis, visando a modelagem deste fenômeno estudado. Neste experimento (fenômeno denominado *Percolação*) estuda-se o avanço do fogo em uma floresta ou o contágio de pessoas por alguma anomalia viral. Supõe-se que a probabilidade de uma árvore passar o fogo para uma vizinha qualquer é $p \in (0, 1)$ (ou uma pessoa passar o vírus para um vizinho). A probabilidade p será a variável independente, enquanto $L32$ e $L64$ serão as dependentes, e representam o tamanho da área estudada. Plote o gráfico de dispersão com as duas variáveis [$p \times L32$ e $p \times L64$] e você verá a forma similar entre as curvas (tipo Funções de Distribuição $F(x)$), mas com alguma diferença. Você notará que as duas se cruzam. Proponha uma função comum para ambas as situações ($L32$ e $L64$), diferenciando-se apenas por seus parâmetros. Determine os parâmetros para cada curva ($L32$ e $L64$). O pesquisador ainda deseja saber em que ponto p^* as duas curvas se encontram, com base no modelo teórico ajustado. Ajude-o nesta pequena tarefa estatística deixando bem claro o modelo sugerido e a metodologia ou critério adotado para obtenção de p^*. O arquivo com os dados é *percolacao.xls* e está no site *www.helitontavares.com/aplicada/listas.*

..../PROB/HT04030.tex

165) Na página da Caixa Econômica Federal podemos baixar os resultados de todas as loterias. Faça o download dos resultados da Megasena, de todos os sorteios até agora, no site abaixo. Considere os resultados sendo realizações da variável $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ e ordene-os, denominando $(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, X_{(4)}, X_{(5)}, X_{(6)})$, onde $X_{(1)}$ é o Mínimo e $X_{(6)}$ é o máximo. Proponha uma distribuição para $X_{(1)}$ outra para $X_{(6)}$

Site: *http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/megasena/download.asp*

..../PROB/HT04031.tex

166) Elabore uma macro para acumular (somar) n observações de uma $X \sim U(5, 15)$ e depois apresentar na tela o valor médio. Use $n = 10000$.

..../PROB/HTmacro01.tex

167) Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes, todas com média 100 e variância 100. Obtenha o valor esperado e a variância de $Z = (X_1 - 2X_2 + X_3)/4$.

..../PROB/IBGE2010Q29.tex

168) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, correspondendo às medições realizadas por dois diferentes operadores. Essas variáveis aleatórias possuem a mesma média , mas as variâncias são diferentes, σ^2_X e σ^2_Y, respectivamente. Deseja-se calcular uma média ponderada dessas duas medições, ou seja, $Z = kX + (1 - k)Y$. Qual o valor de k que torna mínima a variância de Z?

..../PROB/IBGE2010Q34.tex

169) Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e $B_1, B_2, \cdots, B_n$ eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Para $j = 1, \cdots, n$, suponha que B_j seja independente de $\bigcap_{i=1}^n A_i$, e que os $B'_j s$ sejam disjuntos 2 a 2. Mostre que $\bigcup_{j=1}^n B_j$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$ são independentes.

..../PROB/MN01024.tex

170) Sendo A e B independentes, verifique que também são independentes os eventos:

a) A e B^c.

b) A^c e B.

c) A^c e B^c.

..../PROB/MN013006.tex

171) Considere o lançamento sucessivo e independente de uma moeda equilibrada. Defina A_n como o seguinte evento: o lançamento n inicia uma série de exatamente 3 caras, isto é, nem mais nem menos do que 3 caras. Usando o Lema de Borel-Cantelli, determine a probabilidade da ocorrência de um número infinito dos A_n's.

..../PROB/MN013010.tex

172) Sendo A e B dois subconjuntos em Ω, mostre que $(I_A(\omega) - I_B(\omega))^2$ é também um indicador. Qual é o subconjunto relacionado a esse indicador?

..../PROB/MN014013.tex

173) Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 eventos independentes e com probabilidades 0,5; 0,4; 0,3 e 0,2; respectivamente. Determine a probabilidade de B, cuja função indicadora é dada por $I_B = 1 - \prod_{i=1}^{4}(1 - I_{A_i})$.

..../PROB/MN014023.tex

174) Um ponto $(a, b) \in \Re^2$ é escolhido aleatoriamente no quadrado definido por $-1 < x \leq 1$ e $-1 < y < 1$. Considerando a equação $ax + b = 0$, determine a probabilidade de sua solução ser positiva.

..../PROB/MN014031.tex

175) Escolha, ao acaso, um ponto (a, b) na região de $\mathbb{R}^2$ definida por $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Para a equação $z^2 + 2az + b = 0$, determine a probabilidade das raízes serem:

a) Dois números reais e distintos.

b) Dois números reais.

..../PROB/MN014033.tex

176) Um cavalo tem probabilidade p de saltar um obstáculo. De cinco tentativas ele conseguiu saltar em 3, qual é a probabilidade condicional da primeira tentativa ter sido bem sucedida?

..../PROB/MN014049.tex

177) Um cavalo tem probabilidade p de saltar um obstáculo. De cinco tentativas ele conseguiu saltar em 3, qual é a probabilidade condicional da primeira tentativa ter sido bem sucedida?

..../PROB/MN014066.tex

178) Uma caixa contém m bolas brancas e n vermelhas. Dois jogadores se alternam em retirar, ao acaso, uma bola da caixa. As retiradas são com reposição e vence quem retirar a primeira bola branca. Mostre que quem inicia o jogo tem vantagem.

..../PROB/MN014071.tex

179) Considere um jogo de roleta com 36 números. Um jogador tem 5 fichas e aposta sempre, em cada rodada, 1 ficha em um dos números. Caso dê seu número, ele ganha 36 fichas (sua aposta mais 35). Qualquer outro número ele perde sua aposta. Qual é a probabilidade do jogador perder todas as suas fichas em até 50 rodadas?

..../PROB/MN014076.tex

180) Seja S uma particular sequÃªncia (finita) de caras e coroas. Mostre que, se uma moeda, com probabilidade de cara igual a p (0 ¡ p ¡ 1), Ã© jogada de forma independente infinitas vezes, entÃ£o a sequÃªncia S ocorre infinitas vezes com probabilidade 1.

..../PROB/MN014091.tex

181) O intervalo $[0,1]\bigcap\Re$ é dividido em cinco partes, por quatro pontos escolhidos ao acaso. Determine a probabilidade das partes serem menores que 1/2.

..../PROB/MN014097.tex

182) Sendo $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, mostre que temos

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

com $S_k = \displaystyle\sum \cdots \sum_{1<i_1<\cdots<i_k<n} P(A_{i_1}, A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$

..../PROB/MN014118.tex

183) Se $X \sim B(n,p)$, qual é o modelo de $Y = n - X$?

..../PROB/MN02003.tex

184) Sendo X uma variável aleatória com distribuição F_X, determine a função de dstribuição de $Y = -X$ e $W = |X|$.

..../PROB/MN02011.tex

185) Numa certa região a probabilidade de chuva é $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Um morador da região, acostumado com as variações muito frequentes do clima, afirma que acerta mais que os meteorologistas. Ele costuma jogar sua moeda, que indica chuva com probabilidade $\beta \in (0,1)$. Suponha que são feitas, de forma independente, previsões em três dias.

a) Discuta o comportamento probabilístico do número de acertos do morador

b) Supondo α conhecido, qual deve ser β de modo que a probabilidade de três acertos seja máxima?

c) Um novato na região diz que, pra maximizar o acerto, é melhor dizer que chove todo dia. O que você acha?

..../PROB/MN02037.tex

186) Se $X \sim Gama(\alpha, 1)$ e $Y \sim Poison(\lambda$, mostre que $P(X > \lambda) = P(Y < \alpha)$.

..../PROB/MN02038.tex

187) Sendo $X \sim B(n,p)$, qual é o valor k (k inteiro entre 0 e n), que tem probabilidade máxima?

..../PROB/MN02041.tex

188) A variável X tem função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1; \\ \frac{1}{c}(1 - e^{-(x-1)}) & 1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{c}(1 - e^{-1} + e^{-2} - e^{-2(x-1)}) & x \geq 2. \end{cases}$$

a) Obtenha o valor de c.

b) Classifique a variável e obtenha a correspondente função densidade ou de probabilidade, conforme o caso.

c) Determine $P(X > 3/2 | X < 4)$.

..../PROB/MN0220005.tex

189) Para $m, n > 0$, seja $P(X = m + n | X > m) = P(X = n)$ uma versão da propriedade da falta de memória. Verifique se ela está satisfeita para os modelos abaixo:

a) Poisson(λ).

b) B(n, p).

c) Geo(p).

..../PROB/MN0230008.tex

190) A função densidade conjunta de X e Y é dada abaixo. Obtenha a função de distribuição de $Z = X - Y$.

$$f(x, y) = exp(-2x - y)I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y).$$

..../PROB/MN030026.tex

191) Considere o conjunto $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F_X. Seja $Y_1 = min\{X_i\}$ e $Y_n = max\{X_i\}$. Mostre que:

(a) $F_{Y_1}(z) = 1 - (1 - F_X(z)))^n$

(b) $F_{Y_n}(z) = (F_X(z))^n$

(c) Obtenha F_{Y_1} quando $X_i \sim Geo(p), \forall i$

..../PROB/MN0300XX.tex

192) Considere a função:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{y^x e^{-y}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, ... \text{ e } y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada y fixado, $f(.|y)$ é uma função de probabilidade.

b) Determine a conjunta de X e Y se $Y \sim Exp(1)$

..../PROB/MN0320009.tex

193) Duas câmeras de vídeo funcionam, de forma independente, monitorando a segurança da portaria de um prédio residencial. Admita que o tempo até acontecer uma falha na câmera é Exponencial, com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, para as câmeras 1 e 2. Supondo que ambas as câmeras iniciaram suas atividades no instante zero, obtenha o valor esperado do instante a partir do qual não haverá câmera em operação na portaria.

..../PROB/MN045019.tex

194) Sejam X $U_c(-2, 2)$ e $Y = X^2$. Determine o valor esperado de X, Y e XY. Que dizer da independência entre X e Y?

..../PROB/MN045025.tex

195) Sendo X e Y independentes com $X \sim N(0, 1)$ e Y igual a 1 ou -1, com mesma probabilidade. Para $Z = XY$, calcule o coeficiente de correlação entre X e Z. As variáveis X e Z são independentes?

..../PROB/MN05025.tex

196) Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequencia de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Seja N uma outra variável, assumindo valores inteiros não negativos, e independente das $X_i's$. Determine a média e a variância de $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

..../PROB/MN05026.tex

197) Para $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 2)$, independentes.

a) Determine a função geradora de momentos de $X^2 + Y^2$ e, a partir daí, sua média.

b) Calcule a função geradora de momentos conjunta de X^2 e Y^2 e, a partir daí, a média de X^2.

..../PROB/MN05043.tex

198) Seja X uma v.a. tal que

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!}, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a fgm de X e identifique sua distribuição.

..../PROB/MN05051.tex

199) Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias $i.i.d.$, seguindo o modelo Uniforme Contínuo em (0,1). Calcule o limite em probabilidade de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-\log X_k)$.

..../PROB/MN06028.tex

200) Sejam $X_n, n \geq 1$ variáveis aleatórias $i.i.d$ com média μ e variância σ^2, ambas finitas. Com o uso do Teorema Central do Limite, determine o tamanho da amostra n para que $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}) \simeq 0,95$.

..../PROB/MN06038.tex

201) Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias $i.i.d.$ com média 0 e variância 2. Obtenha o limite em distribuição de

a) $\frac{\sqrt{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$

b) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}}$

..../PROB/MN06055.tex

202) Sejam X_n e Y_m variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson de parâmetros m e n, respectivamente. Mostre que

$$\frac{(X_n - n) - (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{d} N(0,1)\text{para } m \text{ e } n \to \infty.$$

..../PROB/MN06065.tex

203) Apresente e demonstre as corcunstâncias em que as distribuições se aproximam.

a) Hipergeométrica e Binomial

b) Binomial e Poisson

..../PROB/MNex022.tex

204) Num lote de $m + n$ peças existem m defeituosas. Uma amostra sem reposição de r peças, $r < m + n$ é sorteada. Obtenha a probabilidade de encontrarmos k peças defeituosas, $k \leq \min(r, m)$.

..../PROB/MNex19.tex

205) O tempo em minutos, X, para a digitação de um texto, é considerado uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada pela função abaixo. Obtenha o valor esperado de X.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

..../PROB/MPU2007Q40.tex

206) O tempo em minutos, X, para a digitação de um texto, é considerado uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada pela função abaixo. Obtenha o valor esperado de X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{12}, & \text{se } 2 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

..../PROB/MPU2007Q40b.tex

207) A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta das freqüências relativas a X e Y, onde:

X: preço, em reais, do produto X.

Y: preço em reais, do produto Y.

Y / X	2	3	4
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1
3	0.3	0	0.1

Para fabricação de uma peça Z são utilizadas os produtos X e Y e está sendo analisada a viabilidade econômica desta peça. Se Z utiliza 3 unidades de X, e 5 unidades de Y, qual é o custo médio de Z?

..../PROB/MPU2007Q47.tex

208) A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta das freqüências relativas a X e Y, onde:

X: preço, em reais, do produto X.

Y: preço em reais, do produto Y.

Y / X	2	3	4
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1
3	0.2	0.1	0.1

Para fabricação de uma peça Z são utilizadas os produtos X e Y e está sendo analisada a viabilidade econômica desta peça. Se Z utiliza 3 unidades de X, e 5 unidades de Y, qual é o custo médio de Z?

..../PROB/MPU2007Q47b.tex

209) A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta das freqüências relativas a X e Y, onde:

X: preço, em reais, do produto X.

Y: preço em reais, do produto Y.

Y / X	2	3	4
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1
3	0.3	0	0.1

Para fabricação de uma peça Z são utilizadas os produtos X e Y e está sendo analisada a viabilidade econômica desta peça. Se Z utiliza 5 unidades de X, e 3 unidades de Y, qual é o custo médio de Z?

..../PROB/MPU2007Q47c.tex

210) [11pt,a4paper]report [brazil]babel [latin1]inputenc fancyheadings enumerate color [normalem]ulem amssymb [dvips]graphicx Heliton

Capítulo 1

Valor Esperado

a) Se Z for uma v.a discreta, então:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p(z_i) \quad ondep(z_i) = P(Z = z_i)$$

b) Se Z for uma V.a Contínua, com f.d.p g, então:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} zg(z)dz$$

1.1 V.A. Discreta

1.1.1 Uniforme Discreta: $U_d\{1, 2, \cdots, n\}$

1.1.2 Bernoulli(p)

1.1.3 Binomial(n, p)

1.1.4 Poisson(λ)

1.1.5 Geométrica(p)

1.2 V.A. Contínua

1.2.1 Uniforme Contínua : $U_c(a, b)$

1.2.2 Exponencial(λ)

1.2.3 $N(0, 1)$)

1.2.4 $N(\mu, \sigma^2)$)

1.2.5 Gama (α, β))