Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)
Faculdade de Estatística (FAEST)

Disciplina: Cálculo das Probabilidades II / 2014-Per. 4 **Prova n^o: 4 (Sub)**
Professor: Prof. Dr. Héliton Tavares, Prof. Dr. Paulo Cerqueira
Nome: ______________________________ **Matrícula:** ____________

*********************************** **Atenção:** **

i) Todos os exercícios abaixo devem ser resolvidos e enviados em doc ou pdf por email para heliton@ufpa.br

ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento.

iii) A prova poderá ser feita em dupla ou individual, de forma honesta e organizada.

iv) Algumas questões envolvem comandos básicos do software R, que podem ser facilmente encontrados no próprio material do curso ou na Internet.

****

1) Sejam $X \sim N(0,9)$ e $Y = \chi^2_{25}$ v.a's independentes. Usando apenas a definição[1] da variável t, encontre k tal que a distribuição da v.a $U = k\frac{X}{\sqrt{Y}}$ seja t-Student com 25 graus de liberdade.

[1] Teorema 30, página 171

..../PROB/CP10002A.TEX

2) Sejam $X_k \sim \chi^2_{2k}$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Quais são as distribuições de X_1, X_2 e X_3?

b) Usando apenas a definição[2] da variável F, encontre k tal que a distribuição da v.a. $W = k\left(\frac{X_2+X_3+X_4}{X_1}\right)$ seja F-Snedecor, e informe o grau de liberdade.

c) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

[2] Teorema 32, página 172.

..../PROB/CP10003C.TEX

3) Seja X uma v.a. $X \sim U_c(0,1)$. Determine as Funções de Distribuição (Acumulada) F's das v.a.'s Y abaixo. Para cada transformação Y, gere 1000 valores (dados) no R e compare a *Ogiva* (Frequência Acumuada Relativa) com as F's obtidas e discuta se estão próximas. Você seria capaz de propor uma medida para verificar se os dados estão próximos da distribuição teórica F?
(a) $-X$, (b) $|X|$, (c) X^2 (d) $\sqrt{X}$ e (e) $\ln(1-X)^{-1}$.

..../PROB/CP228C.TEX

4) Seja $X \sim \chi^2_{20}$, obtenha o valor de "a" tal que:

a) $P(X \leq a) = 0,10$

b) $P(X > a) = 0,95$

c) $P(X \leq a) = 0,99$

d) $P(X \geq a) = 0,025$

..../PROB/CP62.TEX

5) Calcule a Função Geradra de Momentos (FGM) da v.a. X quando a distribuição de X é (i) Poisson(λ) e (ii) Normal(μ, σ^2). Use-as para obter a média e a variância nos dois casos.

..../PROB/CP102.TEX

6) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

..../PROB/CP74.TEX

7) Um professor falou que sendo S_n^2 a variância amostral de uma amostra de tamanho n de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $T_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$ tem distribuição t-Student com parâmetro $n-1$ (graus de liberdade). Falou ainda que quando n cresce, temos que S_n converge para σ, por isso para n grande podemos trocar a t_n pela $N(0,1)$ nas aplicações (adota-se $n > 30$). Monte um script em R para verificar se as duas afirmações parecem verdadeiras. Use $\mu = 0$.

..../prog/prog040.tex

8) Há um teorema emtremamente importante na área de Estatística chamado *Lei dos Grandes Números*, que diz que se temos uma sequencia de variáveis (amostra) $X_1, X_2, \cdots$ com $E(X_i) = \mu$, então $\overline{X}_n \to \mu$ (a média amostral *converge* para o verdadeiro valor). Também temos que se $X \sim \chi_n^2$ (Qui-quadrado com n graus de liberdade), então podemos desdobrá-la em várias parcelas independentes, desde que a soma dos graus de liberdade coincida, ou seja, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ onde cada X_i é uma v.a. Qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Assim, $X/n \to 1$. Faça uma macro no R para verificar se são verdades estes resultados:

   (a) A soma n de v.a.'s χ_1^2 independentes é também uma v.a. χ_n^2

   (b) Uma v.a. χ_n^2 dividida pelo seu grau de liberdade converge para 1.

..../prog/prog041.tex

9) Quando dividimos uma $N(0,1)$ por outra $N(0,1)$ temos uma variável cuja distribuição é chamada de *Cauchy (0,1)*, ou simplesmente *Cauchy Padrão*. Faça uma sintaxe em R gerar dois vetores de tamanho $n = 10000$ de $N(0,1)$, fazer a divisão (assim gerando a Cauchy). Plote o histograma dela, e no mesmo gráfico junte a função densidade da $N(0,1)$ e da t_k (escolha k) para avaliar as diferenças. Ela pode ser aproximada por alguma das duas, ou ambas?

..../prog/prog042.tex

10) [Teorema Central do Limite (TCL)] Em Estatística costuma-se dizer que, independente da distribuição dos dados, a média amostral é uma variável que tem distribuição aproximadamente normal (teoricamente, converge para a normal). Formalmente, se temos uma amostra de tamanho n e X_i é tal que $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$ temos que $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, então $\overline{X}_n \simeq N(\mu, \sigma^2/n)$, ou seja, temos que $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma \longrightarrow N(0,1)$. Gere $r = 10000$ amostras de tamanho $n = 100$ de uma $U(0,1)$ e verifique se o TCL está satisfeito.

..../prog/prog055b.tex

!!!!! Bom Trabalho !!!!!