Processos Estocásticos - Parte III
A distribuição exponencial e o processo de Poisson

Héliton R. Tavares

Universidade Federal do Pará
www.ufpa.br/heliton
heliton@ufpa.br

Índice

Sites e materiais de apoio

- Wikipédia:
  https://pt.wikipedia.org/wiki/Processo_de_Poisson
- Portal Action: http://www.portalaction.com.br/processo-estocastico/processo-de-poisson

Introdução

Neste capítulo trataremos de um processo estocástico a parâmetro contínuo, ao contrário da cadeia de markov que foi tratado a parâmetro discreto.
Muitos fenômenos são modelados dessa forma, tais como: (a) a chegada de uma mensagem em centro de computação operando on-line, (b) uma chamada de telefone em um centro de reservas de passagens, (c) uma interrupção do final de uma fila, (d) a ocorrência de uma falha de um hardware ou software em um computador.
Duas distribuições são muito utilizadas nestes fenômenos, que são a distribuição Exponencial e a distribuição de Poisson, que se relacionam no Processo de Poisson.

A distribuição exponencial: definição e propriedades

Definição

A distribuição exponencial é um tipo de distribuição contínua de probabilidade, representada por um parâmetro λ. Sua função de densidade pode ser expressa por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty]}(x).$$

Observação

Alguns autores preferem usar outra parametrização: $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} I_{[0,\infty]}(x)$.

Para esta distribuição temos as seguintes características:

1. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
2. $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
3. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
4. $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ (Falta de Memória)
5. Se $X_i, i = 1, \cdots, n$ são $v.a.i.i.d.$ $Exp(\lambda)$, então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gama(n, \lambda)$.

Processo de Contagem

Definição

Um Processo Estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ *é dito ser um* ***Processo de Contagem (PC)*** *se* $N(t)$ *representa o número total de eventos que ocorreram até o tempo* t. *Portanto, um processo de contagem deve satisfazer:*

i) $N(t) \geq 0$

ii) $N(t)$ *é assume valores inteiros*

iii) *Se* $s < t$*, então* $N(s) \leq N(t)$

iv) *Para* $s < t$*,* $N(t) - N(s)$ *é o número de eventos ocorridos no intervalo* $(s, t]$.

Evolução de um Processo de Contagem (PC)

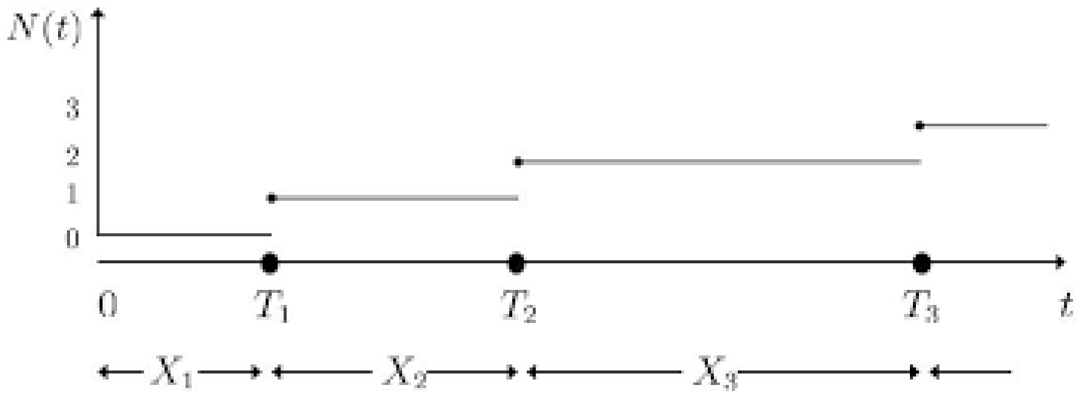

Figura 1: Representação Gráfica de um PC.

Incrementos Independentes e Estacionários)

Definição (Incrementos Independentes)

Um processo de contagem é dito possuir ***incrementos independentes*** *se o número de eventos que ocorrem um intervalos de tempo disjuntos são independentes. Isso significa, por exemplo, que o número de eventos que ocorre no instante t ($N(t)$) deve ser independente do número de eventos que ocorre entre os instantes t e $t+s$ ($N(t+s)-N(t)$).*

Definição (Incrementos Estacionários)

Um processo de contagem é dito ter ***incrementos estacionários*** *se a distribuição do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo de tempo depende somente do comprimento do intervalo de tempo. Ou seja, o processo tem incrementos estacionários se número de eventos no intervalo $(s, s+t)$ tem a mesma ditribuição para todo s.*

Exemplo

Exemplo

Considerando $N(t)$ o numero de pessoas que entram em uma loja até o instante t, então $\{N(t), t > 0\}$ é um processo de contagem no qual um evento corresponde a uma pessoa entrando na loja. Note que se $N(t)$ é o numero de pessoas dentro da loja no instante t, entao $\{N(t), t > 0\}$ nao será um processo de contagem, pois não há garantias da condição (iii).

Definição 1 de PP

O exemplo mais importante de processo de contagem é o processo de Poisson, e a distribuição mais importante associada a esse fenômeno é a distribuição de Poisson.

Definição (PP1)

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ *é dito ser um processo de Poisson com taxa* $\lambda > 0$ *se for verdade que:*

i) $N(0) = 0$

ii) *O processo tem incrementos independentes*

iii) *O numero de eventos em qualquer intervalo de comprimento t é distribuido como Poisson com media* λt*. Isto e, para todo s e* $t > 0$*,*

$$P[N(t+s) - N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Notemos de (iii) que o processo de Poisson $N(t)$ tem incrementos estacionários e que

$$\boxed{E[N(t)] = \lambda t,}$$

de forma que a condição (ii) é bastante razoável, assim como a condição (i). No entanto, a condição (iii) precisa ser mais explorada, por isso uma definição equivalente costuma ser bastante útil. Antes desta, definiremos uma função especial chamada de $o(h)$ que indica a taxa de convergência da função.

Definição

A função f é dita ser $o(h)$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Por exemplo, $f(h) = h^2$ é um $o(h)$, mas $f(h) = h$ não é um $o(h)$.

Definição 2 de PP

Definição (PP2)

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ *é dito ser um processo de Poisson com taxa* $\lambda > 0$ *se for verdade que:*

i) $N(0) = 0$.

ii) *O processo tem incrementos independentes e estacionários.*

iii) *A probabilidade de que exatamente um evento ocorra em qualquer intervalo de tempo de comprimento* h *é* $\lambda h + o(h)$*, isto é,*

$$P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

iv) *A probabilidade de que mais que um evento ocorra em qualquer intervalo de tempo de comprimento* h *é* $o(h)$*, isto é,*

$$P(N(h) \geq 2) = o(h)$$

Em suma, em um intervalo de tempo relativamente pequeno, a probabilidade de uma ocorrência do evento é proporcional ao tamanho do intervalo, enquento a probabilidade de duas ou maus ocorrências decresce rapidamente. A probabilidade de nenhuma ocorrência será dada por

$$P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

.

Teorema (1)

As definições PP1 e PP2 são equivalentes.

Portanto, se $\{N(t), t > 0\}$ é um processo de Poisson com taxa λ, então a variável aleatória Y descrevendo o número de eventos em qualquer intervalo de tempo de comprimento $t > 0$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, isto é,

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Assim, o número médio de eventos ocorrendo em qualquer intervalo de tempo de comprimento t é λt. Esse teorema é surpreendente porque mostra como três condições físicas simples e naturais em $N(t)$ podem caracterizar as funções de probabilidade das variáveis aleatórias. Além disso, é o único parâmetro não conhecido dessas funções de probabilidade. É importante notar que de acordo com o Teorema 1, o número de eventos ocorrendo em cada intervalo de tempo de comprimento t tem uma distribuição de Poisson com valor médio λ. Portanto, é o número médio de eventos ocorrendo por unidade de tempo. A próxima seção caracteriza um outro atributo importante de um processo de Poisson.

Tempo entre chegadas e tempo de espera

Teorema

Seja $\{N(t), t > 0\}$ *um processo de Poisson com taxa* λ*. Seja* $0 < t_1 < t_2 < t_3 < ...$ *os tempos sucessivos de ocorrência dos eventos, e seja os tempos entre chegadas (entre ocorrências) definidos por* $\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \cdots, \tau_k = t_k - t_{k-1}, \cdots$ *Então o conjunto de tempos entre chegadas são variáveis aleatórias com distribuição exponencial de parâmetro* λ*, independentes e identicamente distribuídas.*

O inverso desse teorema também é verdade (admitimos ambos, o teorema e o seu reverso sem provas). Quando ocorre algum evento, tal como a chegada de uma mensagem em um sistema computacional, a chegada de clientes em um banco, etc, eles podem ser descritos por um processo de Poisson. Entretanto o processo de Poisson é um caso especial de um tipo de processo estocástico mais geral, conhecido como *processo de nascimento e morte*. Com efeito, o processo de Poisson é também conhecido como processo de nascimento puro e a partir desse raciocínio é que estaremos aptos a generalizar esse processo e chegar a importantes conclusões sobre uma gama de aplicações desses processo estocásticos de tempo contínuo.

Para darmos uma idéia da prova, condideremos X_1 o tempo até a primeira ocorrência e X_n o tempo entre a $(n-1)$-ésima e n-ésima ocorrências do processo. A distribuição de X_1 é facilmente obtida observando-se que

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

Daí, $F_1(t) = P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, de forma que X_1 tem distribuição exponencial com parâmetro λ. Para os demais intervalos o cálculo é similar, usando que o processo tem incrementos independentes e estacionários:

$$\begin{aligned}
P(X_2 > t|X_1 = s) &= P(\text{nenhum evento em } (s, s+t]|X_1 = s) \\
&= P(\text{nenhum evento em } (s, s+t]) \\
&= P(\text{nenhum evento em } (0, t]) \\
&= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

de onde concluímos que X_2 também é exponencialmente distribuída com média $1/\lambda$ e, sobretudo, que X_2 é independente de X_1. Repetindo o argumeto temos que todos os intervalos entre chegadas têm distribuição exponencial de mesmo parâmetro e são independentes.

Uma outra característica de interesse é o tempo até a ocorrência da n-ésimo evento:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

Portanto, $S_n \sim Gama(n, \lambda)$ com densidade

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Este *tempo de espera* também tem a seguinte propriedade: o tempo até a ocorrência do n-ésimo evento é inferior a t se e somente se no tempo t temos pelo menos n ocorrências, ou seja,

$$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$$

Daí,

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

que tomando a derivada (com relação a t) de ambos os lados nos dá o resultado.

Fazendo as contas...

$$\begin{aligned}
f_{S_n}(t) &= \frac{\partial F_{S_n}(t)}{\partial t} \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right] \\
&= \sum_{j=n}^{\infty}\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + e^{-\lambda t} j\lambda \frac{(\lambda t)^{j-1}}{j!}\right] \\
&= \sum_{j=n}^{\infty}\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right] + \sum_{j=n}^{\infty}\left[\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\right] \\
&= \sum_{j=n}^{\infty}\left[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right] + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\left[\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\right] \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{pois a primeira e a terceira parcela se anulam.}
\end{aligned}$$

Processo de Poisson não homogêneo

Em algumas situações não é possível que as taxas de ocorrência do processo se mantém constante ao longo do dia, mês ou ano, por exemplo, de forma que não temos a propriedade de Estacionariedade. Exemplos desse caso são chamadas telefônicas ou entradas de clientes em um supermeercado. No geral, para pequenos intervalos de tempo é possível assumir a homogeneidade. Nesta seção trabalharemos com a taxa $\lambda(t)$ sendo função do tempo, o que generaliza o caso homogêneo, mas muito da construção do caso homogêneo se mantém. Enunciaremos basicamente a definição do processo.

Definição

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ *é dito ser um processo de Poisson não estacionário ou não homogêneo com função de intensidade* $\lambda(t) > 0$ *se:*

i) $N(0) = 0$.

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ *tem incrementos independentes.*

iii) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

iv) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

Fazendo

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds,$$

pode ser mostrado que

$$\boxed{P\{N(t+s) - N(t) = n\} = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}, \quad n \geq 0.}$$

Ou seja, $N(t+s) - N(t)$ tem distribuição Poisson com média $m(t+s) - m(t)$. Por isso a função $m(t)$ é chamada *função valor médio.*

Exemplo

Héliton tem um carro de cachorro quente que abre às 8h. Das 8h às 11h clientes chegam, em média, a uma taxa crescente que começa com 5 e termina com 20 pessoas por hora. Das 11h às 13h a taxa fica constante em 20 clientes por hora. Depois a taxa cai linearmente até as 17h, quando encerra, com 12 cliente por hora. Assumindo que os clientes chegam de forma independente em intervalos disjuntos, o modelo acima parece razoável? Qual o número esperado de chegadas neste período? Qual a probabilidade de que nenhum cliente chegue entre 8h30 e 9h30?

O modelo de Poisson não-homogêneo parece bom para a situação apresentada, com taxa:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \leq t \leq 3 \\ 20, & 3 \leq t \leq 5 \\ 20 - 2(t-5), & 5 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

Com isso, o número de chegadas entre 8h30 e 9h30 será Poisson com média $m(\frac{3}{2}) - m(\frac{1}{2})$. O número esperado de chegadas nesse intervalo será

$$\int_{1/2}^{3/2} (5 + 5t)dt = 10,$$

e este número será zero com probabilidade

$$P\left\{N\left(\frac{3}{2}\right) - N\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \exp\left\{-\int_{1/2}^{3/2} (5+5t)dt\right\} = e^{-10}.$$

Processo de Poisson Composto (PPC)

O processo de Poisson composto é usado quando cada ocorrência do Processo de Poisson está relacionada à outra variável. Por exemplo, em um supermercado, cada cliente que entra gasta um valor Y_i. Portanto, o processo de poisson composto pode ser assim enunciado:

Definição

Um processo de contagem $\{X(t), t \geq 0\}$ *é dito ser um processo de Poisson composto se ele puder se representado, para cada* $t \geq 0$, *por*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

onde $\{N(t), t \geq 0\}$ *é um processo de Poisson e* $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ *é uma família de v.a. independentes e identicamente distribuídas com* $E(Y_i) = \mu_Y$ *e* $Var(Y_i) = \sigma_i^2$. *O processo* $\{N(t), t \geq 0\}$ *e a sequência* $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ *são assumidos serem independentes.*

Esperança de um PPC

Vamos calcular a esperança e variância deste processo. Para calcular $E[X(t)]$, temos que condicionar em $N(t)$:

$$E[X(t)] = E(E[X(t)|N(t)]).$$

Agora, considerando um n fixado,

$$\begin{aligned} E[X(t)|N(t)=n] &= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i | N(t)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i | N(t)=n\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mu_Y = n\mu_Y. \end{aligned}$$

Portanto, como a expressão acima vale para todo n, podemos escrever,

$$E[X(t)|N(t)] = N(t)\mu_Y.$$

E, consequentemente,

$$E[X(t)] = E(E[X(t)|N(t)]) = E[N(t)\mu_Y] = E[N(t)]\mu_Y = \lambda t \mu_Y$$

Variância de um PPC

Para o cálculo da variância de $N(t)$, procedemos de forma similar, obtendo:

$$Var[X(t)|N(t)] = N(t)Var(Y_1)$$

e, portnto,

$$\begin{aligned}
Var[X(t)] &= E[N(t)Var(Y_1)] + Var[N(t)E(Y_1)] \\
&= \lambda t Var(Y_1) + (E(Y_1))^2 Var[N(t)] \\
&= \lambda t Var(Y_1) + (E(Y_1))^2 \lambda t \\
&= \lambda t [Var(Y_1) + (E(Y_1))^2] \\
&= \lambda t E(Y_1^2).
\end{aligned}$$

e o desvio-padrão é

$$DP(X(t)) = \sqrt{\lambda t E(Y_1^2)}$$

Exemplo

Suponha que famílias migrem para uma área de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 2$ por semana. Se o número de pessoas em cada família é independente e toma valores valores 1,2,3 ou 4 com probabilidades $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, respectivamente, então qual o número de indivíduos migrando para aquela área durante 5 semanas?

Seja Y_i o número de pessoas na i-ésima família. Temos que

$$E(Y_1) = \frac{5}{2} \quad e \quad E(Y_1^2) = \frac{43}{6}.$$

Seja $X(5)$ o núnero de imigrantes durante as 5 semanas. Então,

$$\begin{aligned} E[X(5)] &= 2 \times 5 \times \frac{5}{2} = 25 \\ Var[X(t)] &= 2 \times 5 \times \frac{43}{6} = \frac{215}{3}. \end{aligned}$$