Processos Estocásticos - Parte II

Héliton R. Tavares

Universidade Federal do Pará
www.ufpa.br/heliton
heliton@ufpa.br

Índice

Sites e materiais de apoio

- Wikipédia:
  https://pt.wikipedia.org/wiki/Cadeias_de_Markov|
- Portal Action:
  http://www.portalaction.com.br/processo-estocastico/|
  cadeia-de-markov|

Introdução

Nesta etapa trataremos de aplicações da Probabilidade que serve para modelar muitos fenômenos, tais como a evolução de uma colônia de bactérias, um incêndio em uma floresta, movimentação de moléculas de um gás, dentre outros. Consideraremos uma sequência de variáveis aleatórias medidas ao longo do tempo, espaço ou qualquer outra dimensão. Esta sequência recebe o nome de *Processos Estocásticos*. A seguir formalizaremos a definição deste processo.

Definição (Processo Estocástico)

Um Processo Estocástico (PE) é uma família de v.a. $\{X_t,\ t \in T\}$. *Para cada* $t \in T$ *(Espaço do Parâmetro)* X_t *representa a "posição" de um sistema que evolui aleatoriamente no tempo.*

O Espaço do Parâmetro pode ser discreto ou contínuo. T é discreto se for enumerável e contínuo se for um subconjunto dos reais. Quando T é discreto o Processo será representado por $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$. Neste caso particular em que $n \in \mathbb{N}$ diremos que estamos em processo estocástico a *Tempo Discreto*. Um Processo $\{X_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ será chamado de Processo Estocástico a *Tempo Contínuo*.

Espaço de Estados

O conjunto de valores que as variáveis X_n assumem será chamado de Espaço de Estados do processo, representado por $\mathbb{E}$. Em princípio, o conjunto $\mathbb{E}$ será um subconjunto dos inteiros. Se $\{X_n = i\}$, diremos que o processo está no estado i no tempo n.

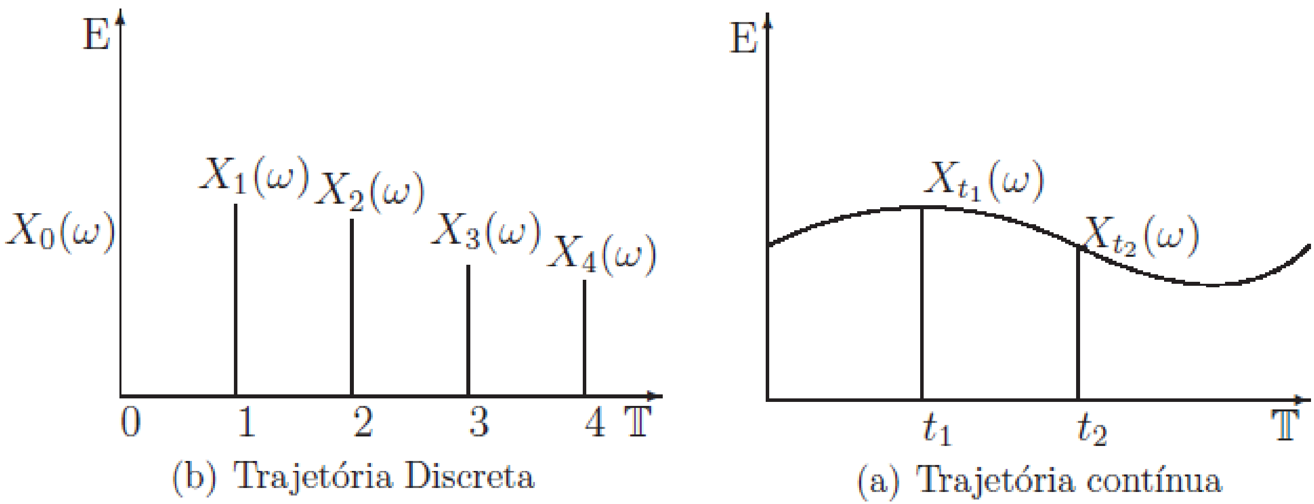


Figura 1: Representação Gráfica de uma CM.

Evolução de investimentos

$\mathbb{E}$ será um intervalo (contínuo).

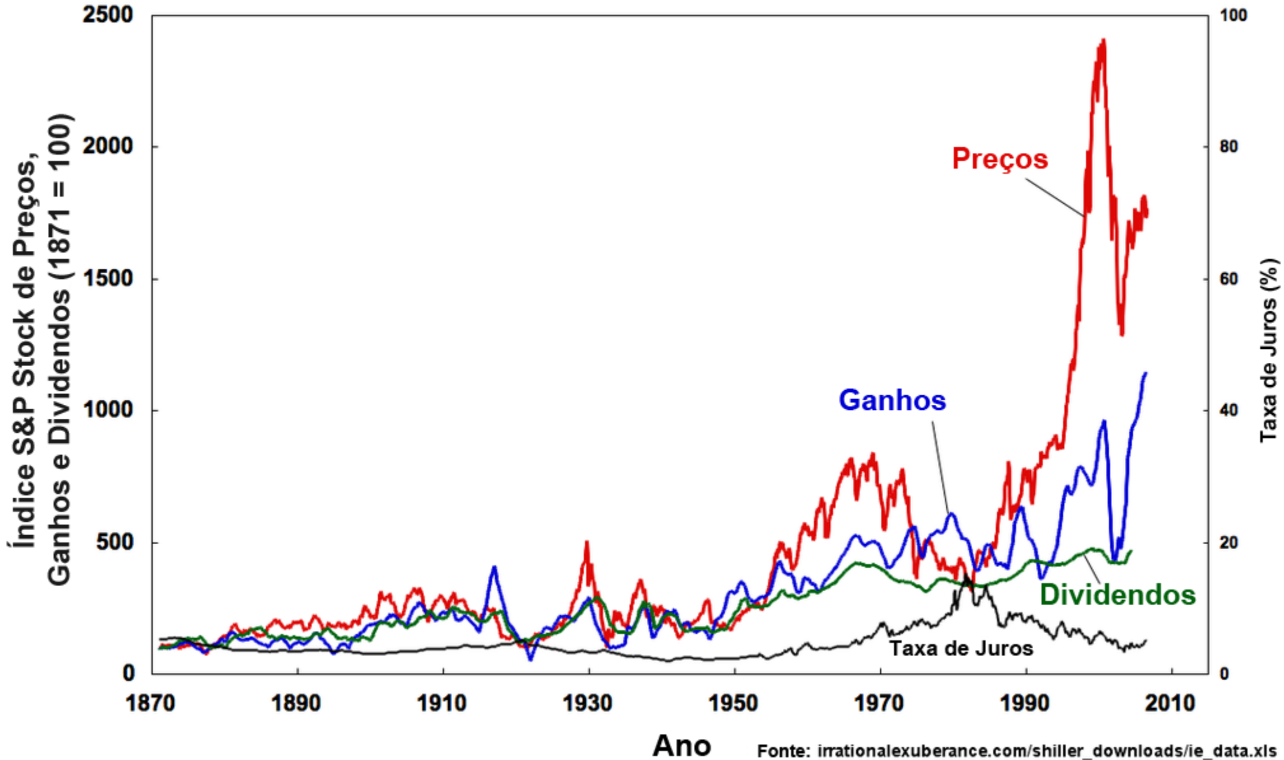


Figura 2: Representação Gráfica de uma CM.

Cadeia de Markov (Markov Chain)

Veremos, inicialmente, o caso particular de uma sequencia de variáveis aleatórias dependentes, mas com uma dependência bem restrita.

Definição (Cadeia de Markov - CM)

Uma sequência de variáveis aleatórias $X_0, X_1, X_2, \cdots$ *definidas em um espaço amostral com valores em um conjunto enumerável* $\mathbb{E}$ *é uma Cadeia de Markov (CM) se, para todo* $n, n \geq 1$*, e estados* $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$*,* i, j *de* $\mathbb{E}$*, tem-se:*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1)$$

Esta propriedade nos diz que para conhecer a vida futura (X_{n+1}) do processo, conhecidos o presente (X_n) e o passado $(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_0)$, é suficiente conhecer o presente, não importando o passado. Ou seja, não importa por quais estados ele passou antes de chegar ao estado i. Em outras palavras, o Presente já contém toda a informação do passado.

Em um Processo Markoviano, o Passado não importa, apenas o Presente. Esquece o passado!

Exemplo (Passeio Aleatório em $\mathbb{Z}$)

Consideremos uma partícula inicialmente na origem. A cada instante a partícula dá um salto para a direita com probabilidade p ou para a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$. Seja X_n a posição da partícula no instante n (ou seja, após n saltos). Temos que

$$X_0 = 0, \quad X_1 = \begin{cases} -1, & q \\ 1, & p \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} -2, & q^2 \\ 0, & 2pq \\ 2, & p^2 \end{cases}$$

Esta é um Processo Estocástico com $T = \mathbb{N}$ e $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$. Sua representação gráfica é denominada *Grafo, Topologia* ou Diagrama de Transição da cadeia.

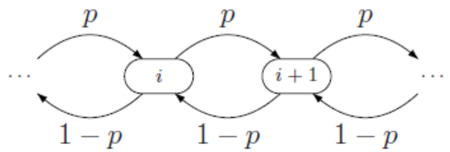


Figura 3: Grafo(Topologia) do Passeio Aleaório Simples

Exemplo (Soma de v.a.i.i.d.)

Seja $X_0, X_1, X_2, \cdots$ *uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas, definidas em um espaço* S *e assumindo valores em* $\mathbb{E}$. *Seja, ainda*

$$Y_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n.$$

Então, $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ *é uma cadeia de Markov.*

Para verificar esta afirmação, temos que mostrar que a Equação (1) vale neste caso. De fato, temos que:

$$Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}.$$

Observemos que dar a sequência $Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \cdots, Y_n = i_n$ é equivalente a dar a sequência $X_0 = i_0, X_1 = i_1 - i_0, .., X_n = i_n - i_{n-1}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
&P[Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_n = i_n,\ Y_{n-1} = i_{n-1},\ ..,\ Y_0 = i_0] = \\
&P[Y_n + X_{n+1} = i_{n+1} | Y_n = i_n,\ Y_{n-1} = i_{n-1},\ ..,\ Y_0 = i_0] = \\
&P[X_{n+1} = i_{n+1} - i_n | X_n = i_n - i_{n-1},\ ..,\ X_1 = i_1 - i_0,\ X_0 = i_0] = \\
&P[X_{n+1} = i_{n+1} - i_n]
\end{aligned}
$$

que decorre do fato das variáveis da sequência $X_0, X_1, ...$ são independentes. Decorre que:

$$P[Y_{n+1} = i_{n+1} | Y_n = i_n] = P[X_{n+1} = i_{n+1} - i_n],$$

o que prova nossa afirmação. $\square$

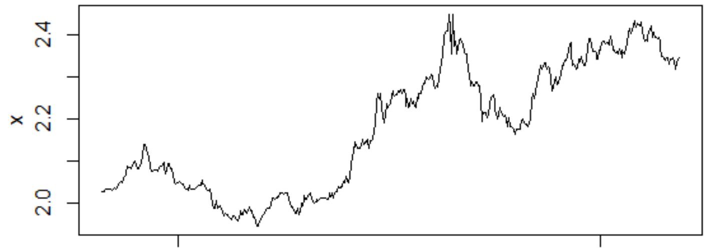


Figura 4: Topologia do Passeio Aleaório Simples

Probabilidade de Transição Estacionária

Em algumas situações a probabilidade de passar do estado i para o estado j depende da etapa n, ou seja,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}(n).$$

No entanto, o caso mais comum é quando não há essa dependência. Suponha, então, que quando o processo está no estado i no tempo n ele poderá passar ao estado j no tempo $n+1$ com probabilidade P_{ij}, independente de n,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}.$$

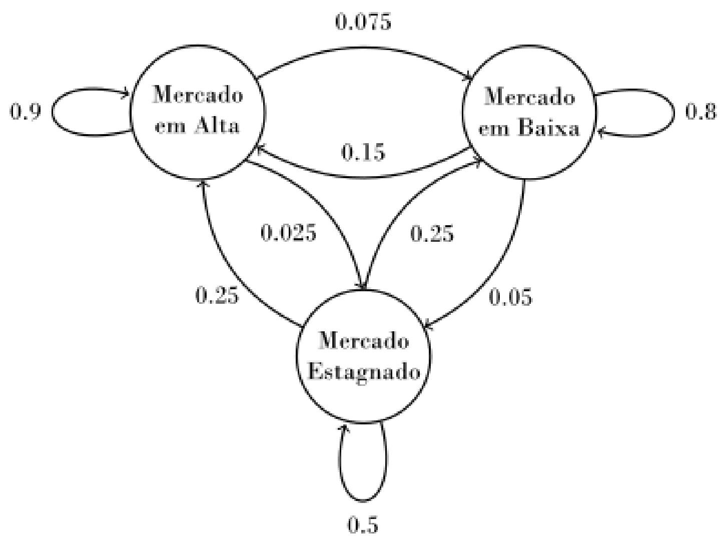
então este processo será chamado de *Cadeia de Markov com probabilidade de transição estacionária*. O valor P_{ij} será chamado de *Probabilidade de Transição*, satisfazendo

$$P_{ij} \geq 0,\ \forall i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1.$$

Matriz de Transição

A *Matriz de Probabilidade de Transição em um passo* será denotada por $\boldsymbol{P}$, com

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \end{array},$$

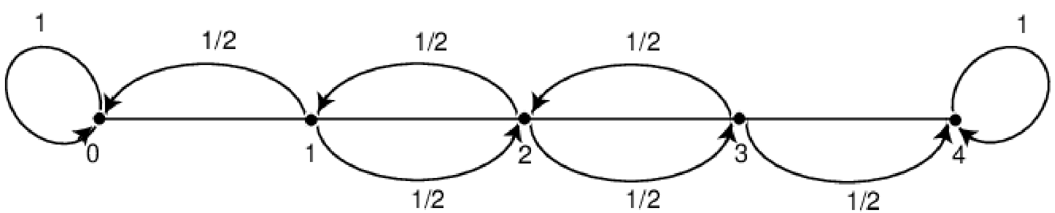


Exemplo

Consideremos uma cadeia com 5 estados: $\mathbb{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e matriz de transição dada por*

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Qual a topologia da cadeia?



Exemplo (Ruina do jogador)

O Jogador A participa de uma sequência de jogos com o jogador B. As jogadas são independentes e em cada uma delas o jogador A ganha uma unidade monetária (digamos, um dólar) de B com probabilidade p e perde uma unidade monetária com probabilidade $1-p$. Se designarmos por X_n o ganho do jogador A na n-ésima jogada, temos uma situação particular do exemplo anterior, em que as variáveis aleatórias X_i assumem os valores $+1$ e -1 com probabilidades p e $q=1-p$, respectivamente. Assim, a sucessão de fortunas do jogador A é uma CM, com $\mathbb{E}=\{0,1,2,\cdots,N\}$, T discreto e cujos elementos da matriz $\boldsymbol{P}$ são dados por

$$P_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{se i=j=0 ou i=j=N}\\ p, & \textit{se j=i+1}\\ q, & \textit{se j=i-1}\end{cases}$$

Ou seja,

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo (Previsão do tempo)

Consideremos que o fato de chover, ou não, hoje depende apenas do fato de ter chovido, ou não, ontem. Suponhamos que se choveu ontem, choverá hoje com probabilidade α; se não choveu ontem, não choverá hoje com probabilidade β. Este problema pode ser formulado em termos de uma Cadeia de Markov? Por que? Em caso positivo, qual a matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$.

Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ o estado climático no n-ésimo dia, com $\mathbb{E} = \{0, 1\}$, e T discreto, onde o estado 0 representa *chuva* (C) e 1 representa *não chuva* $(\overline{C})$. Pelo próprio enunciado já vemos que é uma CM, pois a situação em um dia só depende do dia anterior. A matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ C \\ \overline{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C \quad & \quad \overline{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo (Previsão do tempo II)

Suponha que o fato de chover hoje dependa das condições climáticas de dois dias anteriores. Especificamente, suponha que se choveu ontem e hoje, amanhã irá chover com probabilidade 0,7; se choveu hoje mas ontem não, amanhã irá chover com probabilidade 0,5; se choveu ontem mas hoje não então amanhã irá chover com probabilidade 0,4; se não choveu nem ontem nem hoje, amanhã irá chover com probabilidade 0,2.

Considerando os estados 0 (CC). 1 ($C\overline{C}$), 2 ($\overline{C}C$) e 3 ($\overline{CC}$), vemos que está satisfeita a condição markoviana. Além disso, do estado 0 só podemos passar para os estados 0 e 1; do estado 1 só podemos passar para os estados 2 e 3, do estado 2 só podemos passar aos estados 0 e 1, e do estado 3 para os estados 2 e 3. A matriz de transição é dada por

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo (Modelo de Humor)

Um dia na vida de Gary pode se animado (A), mais-ou-menos(M) ou triste (T). Se o dia de hoje é animado então o de amanha sera A, M ou T com respectivas probabilidades 0,5, 0,4, 0,1. Se hoje ele está mais-ou-menos, amanhã será A, M ou T com respectivas probabilidades 0,3, 0,4, 0,3. E se hoje ele está triste amanhã será A, M ou T com respectivas probabilidades 0,2, 0,3, 0,5. Chamando X_n *o humor de Gary no n-ésimo dia, entao* $\{X_n, n \geq 0\}$ *é uma cadeia de Markov de 3 estados (estado 0 = A, estado 1 = M, estado 2 = T) com matriz de probabilidade de transicao de estados dada por*

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ M \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & M & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo (Modelo de Estoques)

Consideremos que as demandas D de um certo produto A em uma determinada loja são v.a.i.i.d. com distribuição Poisson(λ). Designemos por $X_n, n \geq 1$, os níveis de estoque ao final do n-ésimo dia e por S a capacidade do estoque. A reposição do estoque é feita da seguinte forma: se no final do dia i o nível de estoque X_n é menor que s (um número pré-determinado), então são ordenadas $S - X_n$ peças para reposição, de modo que no dia seguinte o estoque inicial será S; se tivermos $s \leq X_n \leq S$, então não é feita nenhuma reposição de estoque. Temos, portanto,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_{n+1} & ; \quad s \leq X_n \leq S \\ S - D_{n+1} & ; \quad X_n < s \end{cases} \tag{2}$$

Seja X_0 o nível de estoque no primeiro dia de atividade da loja. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Se for, determine sua matriz de probabilidades de transição.
Obs: *Estoques negativos no final de uma dia serão interpretados como peças que seriam vendidas caso houvessem peças suficientes no estoque.*

Para verificar a veracidade da afirmação, basta notar que $X_{n+1} = X_n - D_{n+1}$. Seja X_0 o nivel de estoque no primeiro dia de atividade da loja. A sequência de estoques $X_0, X_1, X_2, \cdots$ é uma Cadeia de Markov. De fato, a distribuição de probabilidade de X_{n+1} só depende de X_n e da distribuição de probabilidade de D_{n+1}, que é independente de $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Temos, usando (2):

Para $s \leq j \leq S$:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = k | X_n = j] &= P[X_n - D_{n+1} = k | X_n = j] = P[D_{n+1} = X_n - k | X_n = j] \\ &= P[D_{n+1} = j - k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-k}}{(j-k)!} \end{aligned}$$

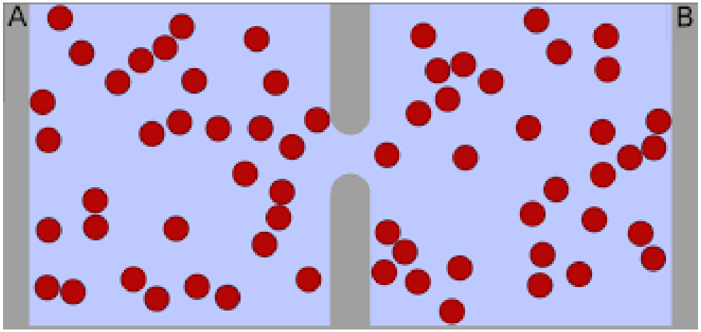
Para $j < s$

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = k | X_n = j] &= P[S - D_{n+1} = k | X_n = j] = P[S - D_{n+1} = k] \\ &= P[D_{n+1} = S - k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{S-k}}{(S-k)!}, \end{aligned}$$

que são os elementos da matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$ da Cadeia.

Exemplo (**Modelo de Ehrenfest**)

Paul e Tatiana Ehrenfest propuseram um modelo, que descreveremos de modo simplificado, para representar as trocas de calor entre duas regiões em um volume de um gás. Aqui as regiões são representadas por duas urnas e as moléculas do gás serão representadas por bolas. As urnas A e B contém um total de $2N$ bolas. Assim, se a urna A contém k bolas, então a urna B conterá $2N - k$. Uma bola é sorteada ao acaso entre as $2N$. Se a bola sorteada estiver na urna A ela é transferida para a urna B e se estiver na urna B é transferida para A. Seja X_0 o número inicial de bolas na urna A e designemos por X_n o numero de bolas nessa urna após o n-ésimo sorteio.



$\{X_n,\ n \geq 0\}$ é uma Cadeia de Markov cujo espaço de estados é o conjunto $I\!E = \{0, 1, 2, \cdots, 2N\}$. De fato, basta observar que se numa dada etapa existem i bolas na urna A então na próxima etapa número de bolas nessa urna será $i-1$ com probabildade $i/2N$ e $i+1$ com probabilidade $1 - i/2N$, independentemente de como chegou-se a essa situação. A matriz de probabilidadae de transição da Cadeia de Ehrenfest é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2N-2 & 2N-1 & 2N \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 2N-1 \\ 2N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2N} & 0 & 1-\frac{1}{2N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2N} & 0 & 1-\frac{2}{2N} & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{3}{2N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2N-1}{2N} & 0 & \frac{1}{2N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Probabilidades de transição em n etapas

Seja $X_0, X_1, \cdots$ una cadeia de Markov com matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$. Vamos determinar as probabilidades de transição dessa cadeia em n etapas, isto é, $P[X_n = j | X_0 = i]$, que denotaremos por $P_{ij}^{(n)}$. Mostraremos que para todo $n \geq 2$

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n-1)} P_{kj} \tag{3}$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(2)} &= P[X_2 = j | X_0 = i] \\
&= \sum_{k \in E} P[X_2 = j,\ X_1 = k | X_0 = i] \\
&= \sum_{k} P[X_2 = j,\ X_1 = k, X_0 = i] / P(X_0 = i) \\
&= \sum_{k} P[X_2 = j | X_1 = k,\ X_0 = i] P[X_1 = k | X_0 = i] P(X_0 = i) / P(X_0 = i) \\
&= \sum_{k} P[X_1 = k | X_0 = i] P[X_2 = j | X_1 = k] \\
&= \sum_{k} P_{ik} P_{kj}
\end{aligned}$$

Notemos que $P_{ij}^{(2)} = P_{ij}^2$, que é o elemento (i, j) do quadrado da matriz $\boldsymbol{P}$.
Para $n > 2$, temos:

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P[X_n = j | X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_n = j,\ X_{n-1} = k | X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_{n-1} = k | X_0 = i] P[X_n = j | X_{n-1} = k,\ X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_{n-1} = k | X_0 = i] P[X_n = j | X_{n-1} = k] \\
&= \sum_k P_{ik}^{(n-1)} P_{kj} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Ponhamos $n = 3$ na expressão (3). Como $P_{ij}^{(2)} = P_{ij}^2$ segue-se dessa expressão que $P_{ij}^{(3)} = P_{ij}^3$. Prosseguindo iteradamente, vemos que para todo $n \geq 2$, $P_{ij}^{(n)} = P_{ij}^n$, ou seja, que a matriz de probabilidades de transição em n etapas é $\boldsymbol{P}^n$, a n-ésima potência da matriz de probabilidades de transição em uma etapa.

Equações de Chapman-Kolmogorov

Lema

Para quaisquer inteiros n e m, tem-se:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \tag{5}$$

Para provar 5 vamos repetir o raciocínio utilizado para verificar (3). De fato,

$$\begin{aligned} P[X_{n+m} = j | X_0 = i] &= \sum_k P[X_{n+m} = j,\ X_n = k | X_0 = i] \\ &= \sum_k P[X_{n+m} = j | X_n = k] P[X_n = k | X_0 = i] \\ &= \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \end{aligned}$$

A Expressão (5) é denominada *Equações de Chapman-Kolmogorov*. Observe que em termos matriciais a equação de Chapman-Kolmogorov é a expressão de $\boldsymbol{P}^{n+m}$ como o produto de $\boldsymbol{P}^n$ por $\boldsymbol{P}^m$.
Probabilisticamente a equação de Chapman-Kolmogorov diz que: para a cadeia fazer uma transição do estado i ela precisa fazer uma

Distribuição Inicial da Cadeia: $\pi_i^{(0)}$

Lema

Uma distribuição inicial para os estados de uma cadeia de Markov e sua matriz de probabilidades de transição determinam para todo inteiro $n \geq 1$ as distribuições de dimensão finita da Cadeia.

Seja $\pi_i^{(0)} = P[X_0 = i]$, para todo $i \in E$, seja $\boldsymbol{P} = (P_{ij})$ para $(i, j) \in E \times E$ a matriz de probabilidades de transição da Cadeia.

$$
\begin{aligned}
&P[X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \ldots,\ X_n = i_n] = \\
&= P[X_0 = i_0]P[X_1 = i_1|X_0 = i_0] \cdots P[X_n = i_n|X_0 = i_0,\ X_1{=}i_1, ..., X_{n-1}{=}i_{n-1}] \\
&= P[X_0 = i_0]P[X_1 = i_1|X_0 = i_0] \cdots P[X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}] \\
&= \pi_{i_0}^{(0)} P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}
$$

Vamos, a titulo de exemplo, calcular algumas potências de uma matriz de probabilidades de transição de uma cadeia de Markov com dois estados. O que observamos nesse exemplo será discutido em profundidade mais adiante.

Matriz de transição em n etapas

Exemplo

Uma Cadeia de Markov com dois estados 0 *e* 1 *é utilizada como modelo para representar mudanças atmosféricas. O estado* 0 *designa um dia em que não chove, e o estado 1 um dia que chove. A matriz de probabilidades de transição é dada por:*

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculando-se o produto da matriz $\boldsymbol{P}$ por $\boldsymbol{P}$, linha por coluna obtemos $\boldsymbol{P}^2$, multiplicando- se $\boldsymbol{P}^2$ por $\boldsymbol{P}$ obtemos $\boldsymbol{P}^3$, multiplicando-se $\boldsymbol{P}^3$ por $\boldsymbol{P}^2$ obtemos $\boldsymbol{P}^5$e multiplicando-se $\boldsymbol{P}^5$ por si mesma obtemos $\boldsymbol{P}^{10}$.

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} \frac{43}{64} & \frac{21}{64} \\ \frac{21}{32} & \frac{11}{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.6689 & 0.3330 \\ 0.6660 & 0.3339 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.6667 & 0.3333 \\ 0.6667 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

A partir da distribuição inicial $\pi_i^{(0)}, i \in E$, e da matriz de probabilidades de transição podemos determinar a distribuição de probabilidade de X_n.

$$\begin{aligned} P[X_n = j] &= P[\bigcup_i \{X_n = j,\ X_0 = i\}] = \sum_i P[X_n = j,\ X_0 = i] \\ &= \sum_i P[X_n = j | X_0 = i] P[X_0 = i] = \sum_i \pi_i^{(0)} P_{ij}^{(n)} \qquad (6) \\ &= \pi_0^{(0)} P_{0j}^{(n)} + \pi_1^{(0)} P_{1j}^{(n)}. \qquad (7) \end{aligned}$$

Classificação de Estados de uma CM

Definição

O estado i conduz ao estado j, que será denotado por $i \to j$, se e somente se, existe um $n \geq 1$ tal que $P_{ij}^n > 0$.

Definição

O estado i se comunica com o estado j se $i \to j$ e $j \to i$. Usaremos a notação $i \leftrightarrow j$ para indicar que i se comunica com j.

A relação $i \to j$ é transitiva, ou seja, se i conduz a j e j conduz a k, então i conduz a k. De fato, da equação de Chapman-Kolmogorov segue que:

$$P_{ik}^{(n+m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)}$$

Decorre desse fato que a relação $i \leftrightarrow j$ é também transitiva. Segue da definição que esta relação é ainda simétrica e reflexiva, sendo assim uma relação de equivalência no conjunto dos estados da Cadeia de Markov. Essa relação de equivalência divide o conjunto dos estados em classes de equivalência e nosso objetivo agora é descrever o comportamento dos estados que pertencem a essas classes de equivalência.

Probabilidade de primeira passagem ou retorno

Para um estado genérico j vamos introduzir a variável aleatória T_j que é o instante da primeira visita a j, quando a Cadeia parte de um estado $i, i \neq j, e$ é igual ao instante do primeiro retorno a j quando a Cadeia parte de j.

$$T_j = \min\{n \geq 1 | X_n = j\}$$

Se não existir um inteiro n satisfazendo essa condição põe-se $T_j = \infty$. Vamos denotar por P_i a distribuição de probabilidade associada à Cadeia que inicia o seu movimento no estado i. Com essa notação temos a igualdade :

$$P_i[X_n = j] = P[X_n = j | X_0 = i]$$

Vamos denotar por $f_{ij}^{(n)}$ a probabilidade que a Cadeia que parte do estado i visite o estado j pela primeira vez no instante n, isto é :

$$f_{ij}^{(n)} = P_i[T_j = n]$$

Denotemos por f_{ij} a probabilidade que a cadeia que parte de i visite j em algum instante. Temos:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_i[T_j = n] = P[T_j < \infty]$$

Observemos que:

(1) Se a Cadeia parte de i ela nunca visita j com probabilidade $P_i[T_j = \infty] = 1 - f_{ij}$

(2) $f_{ij}^{(1)} = P_i[X_1 = j] = P_{ij}$

(3) $f_{ij}^{(n)} = P_i[X_r \neq j,\ 1 \leq r \leq (n-1),\ X_n = j]$

(4) Como a cadeia tem probabilidades de transição estacionárias segue-se que:

$$f_{ij}^{(n)} = P[X_{m+r} \neq j,\ 1 \leq r \leq n-1,\ X_{n+m} = j | X_m = i]$$

para todo $m \geq 1$ e todo $n \geq 1$.

Teorema

Para todo i e j de $\mathbb{E}$ e todo n, $1 \leq n \leq \infty$, temos:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} P_{jj}^{(n-r)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P_i[X_n = j] = P_i[(\bigcup_{r=1}^{n}[T_j = r]) \cap X_n = j] \\
&= \sum_{r=1}^{n} P_i[T_j = r,\ X_n = j] = \sum_{r=1}^{n} P_i[T_j = r] P_i[X_n = j | T_j = r] \\
&= \sum_{r=1}^{n} P_i[T_j = r] P_i[X_n = j | X_1 \neq j,\ \ldots,\ X_{r-1} \neq j,\ X_r = j] \\
&= \sum_{r=1}^{n} P_i[T_i = r] P_j[X_{n-r} = j]
\end{aligned}$$

Assim,

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} P_{jj}^{(n-r)}$$

Classificação de estados de uma Cadeia de Markov

Seja $\{X_n\}$ uma CM com espaço de estados $\mathbb{E}$ (finito ou não) e matriz de transição de probabilidades $\boldsymbol{P}$.

Definição

Um estado i de uma Cadeia de Markov é dito ***recorrente*** *se a Cadeia partindo de i voltar a ele com probabilielade 1.*

Com a notação que introduzimos na seção anterior, o estado i ser recorrente significa que $f_{ii} = 1$.

Definição

O estado i de uma Cadeia de Markov é dito ***absorvente*** *se* $P_{ii} = 1$. *Ou seja, depois que a cadeia entra nele não conseguie mais sair.*

Definição

O estado i de uma Cadeia de Markov é dito ***transitório*** *se a Cadeia partindo de i voltar a i com probabilidade estritamente menor que 1.*

Definição

O estado i de uma Cadeia de Markov é dito ter ***período*** *d se a Cadeia partindo de i voltar a i em tempos múltiplos de d. Quando não existir período definido a cadeia é dita ser* ***aperiódica****.*

Exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Neste exemplo podemos formar três classes: $C_1 = \{0, 1\}$, $C_2 = \{2\}$ e $C_3 = \{3\}$.

Exemplo

Exemplo de uma cadeia periódica com $d = 2$.

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Com a notação introduzida tem-se para um estado transitório i, $f_{ii} < 1$.

Proposição

Se o estado i é transitório, a Cadeia partindo de i volta a i um número finito de vezes.

De fato, cada vez que a cadeia volta ao estado i, a evolução futura é independente do passado e existe probabilidade $1 - f_{ii}$ da cadeia nunca mais voltar a i, logo a cadeia volta a i exatamente n vêzes com probabilidade $(f_{ii})^n(1 - f_{ii})$, para $n = 1, 2, \ldots$. Observemos que se o estado i é recorrente, a cadeia partindo de i volta a i infinitas vezes com probabilidade 1. De fato, como a cadeia partindo de i volta a i com probabilidade um, e pela propriedade Markoviana a cada retorno é como se estivesse iniciando o movimento, segue-se que ela volta infinitas vezes com probabilidade 1.

Definição

Um conjunto A de estados de uma Cadeia de Markov é dito ***fechado*** *se nenhum estado de A conduz a algum estado de A^c.*

Se o conjunto fechado A é formado por um único estado i então este estado é dito **absorvente**.

Definição

Uma Cadeia de Markov é dita ***irredutível*** *se não existe nenhum suconjunto fechado diferente do conjunto de todos os estados. Ou seja, se todos os estados se comunicam.*

Proposição

Se i é recorrente $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$. *Se i é transitório* $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$.

Demonstração.

Denotemos por N_{ii} número de retornos a i partindo de i. Pela observação vimos que N_{ii} é infinito com probabilidade 1 e portanto $E_i(N_{ii}) = \infty$.

Mas $N_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{i\}}(X_n)$, onde $I_{\{i\}}(X_n) = 1$ se $X_n = i$ e 0 se $X_n \neq i$. Com isso,

$$E_i(N_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} E_i(I_{\{i\}}(X_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i[X_n = i] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$$

o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$. Se i é transitório observemos que:

$$\begin{aligned} E_i(N_{ii}) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(f_{ii})^n(1 - f_{ii}) = (1 - f_{ii})f_{ii} \sum_{n=1}^{\infty} n(f_{ii})^{n-1} \\ &= \frac{(1 - f_{ii})f_{ii}}{(1 - f_{ii})^2} = \frac{f_{ii}}{(1 - f_{ii})} < \infty. \end{aligned}$$

Teorema

Se $\boldsymbol{P}$ é uma matriz de transição aperiódica, então:

(i) *As potências $\boldsymbol{P}^n$ convergem para uma matriz A;*

(ii) *As linhas de A são iguais, e representam a fração de tempo que o processo passa em cada estado.*

Distribuição estacionária

Nesta seção determinaremos as medidas de probabilidades invariantes, ou de equilíbio, ou estacionárias de uma cadeia de Markov.

Definição

Seja $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov com $\mathbb{E} = \{0, 1, \cdots \mathbb{N}\}$ (finito) e matriz de transição $\boldsymbol{P}$. Um vetor de probabilidades $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N)$ é dito ser a ***distribuição estacionária*** *para a cadeia se*

$$\boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}, \tag{8}$$

Ou seja, se $\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{E}} P_{ij}\pi_i$, sujeto às restrições $\pi_j \geq 0$ e $\sum_{j \in \mathbb{E}} \pi_i = 1$.

Sendo $\boldsymbol{\pi}$ estacionária, então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi P}^2 &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{PP}) = (\boldsymbol{\pi P})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \\
\boldsymbol{\pi P}^3 &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{\pi P}^2)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\pi P}^n &= \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{P}^{n-1}\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{\pi P}^{n-1})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}$$

Portanto, $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n$, $\forall n \geq 1$. E já vimos que $\boldsymbol{P}^n$ converge para uma matriz cujas linhas são todas iguais. Estas linhas são justamente iguais a $\boldsymbol{\pi}$ e cada elemento representa o tempo médio que a CM passa em cada estado.

Observação

i) *Cada probabilidade π_j é usualmente identificado como a proporção do tempo que o processo permanece no estado j.*

ii) *Usando a notação vista anteriormente, temos que*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}, \qquad \text{onde } \pi_j^{(n)} = P(X_n = j)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_n \qquad \text{onde } \boldsymbol{\pi}_n = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \cdots, \pi_N^{(n)})$$

iii) *sempre podemos ignorar uma das equações, substituindo-a por* $\displaystyle\sum_{j\in \mathbb{E}} \pi_i = 1.$

Exemplo

Consideremos a CM com matriz de transição abaixo. Obter a distribuição estacionaria.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Já vimos que esta cadeia é periódica com $d = 2$. Com isso, a cadeia passa metade do tempo em cada um dos estados, o que resultará em $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$. Temos que resolver o sistema

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que resultará no sistema $\begin{cases} \pi_0 = \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$ cuja solução é $\boxed{\pi_0 = \pi_1 = \dfrac{1}{2}}$.

Exemplo

Consideremos a CM para o modelo de chuvas com matriz de transição abaixo. Obter a distribuição estacionaria.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Temos que resolver o sistema

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

que resultará em $\begin{cases} \pi_0 = \alpha\pi_0 + (1-\beta)\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \pi_0 = \frac{1-\beta}{(1-\alpha)+(1-\beta)} \\ \pi_1 = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+(1-\beta)} \end{cases}$$

Para o modelo de chuva, com matriz a seguir, a solução é?

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercício

Determinar a distribuição estacionária para o modelo de humor com 3 estados apresentado no Exemplo 7.

Definição

Seja j um estado da CM e m_{jj} o número de transições esperado da cadeia, partindo de j, retornar a j. Então,

$$\pi_j = \frac{1}{m_{jj}}$$

Exemplo (Modelo de chuva)

Determinar a distribuição estacionária via tempo médio de retorno.

Seja $T_j = \min\{n \geq 1 | X_n = j | X_0 = 0\}$ o primeiro instante em que a cadeia retorna ao estado 0. Temos que

$$\begin{aligned}
P(T_0 = 1) &= \alpha \\
P(T_0 = 2) &= (1-\alpha)(1-\beta) \\
P(T_0 = 3) &= (1-\alpha)\beta(1-\beta) \\
\ldots &= \ldots \\
P(T_0 = k) &= (1-\alpha)\beta^{k-2}(1-\beta),\ k \geq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{00} &= E(T_0) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(T_0 = k) = P(T_0 = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} kP(T_0 = k) \\
&= \alpha + \sum_{k=2}^{\infty} k(1-\alpha)\beta^{k-2}(1-\beta) \overset{(k-1=j)}{=} \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} (j+1)(1-\alpha)\beta^{j-1}(1-\beta) \\
&= \alpha + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\beta^{j-1}(1-\beta) = \alpha + (1-\alpha)\left[\sum_{j=1}^{\infty} j\beta^{j-1}(1-\beta) + \sum_{j=1}^{\infty}\beta^{j-1}(1-\beta)\right] \\
&= \alpha + (1-\alpha)\left[\frac{1}{1-\beta} + 1\right] = \frac{2-\beta-\alpha}{1-\beta}
\end{aligned}$$

E, consequentemente, $\pi_0 = \frac{1-\beta}{2-\beta-\alpha}$ e $\pi_1 = \frac{1-\alpha}{2-\beta-\alpha}$.

Processo de Ramificação

O modelo que descreverenos nesse exemplo ocorre em várias areas, tais como: física, biologia, genética, pesquisa operacional para citar algumas. Mas descreveremos em termos de partícula. Para aplicá-lo à genética basta substituir partícula por gen.

Exemplo (Processo de Ramificação)

Seja X_0 o número de partículas que formam a Geração inicial, ou Geração Zero. Cada partícula pode produzir novas partículas descendentes. Designemos por Z_i, a variável aleatória igual ao número de descendentes da particula i. Suporemos que essas variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuidas. Com isso, seja X_n o número de partículas que formam a Geração n. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM.

Representação de um Processo de Ramificação

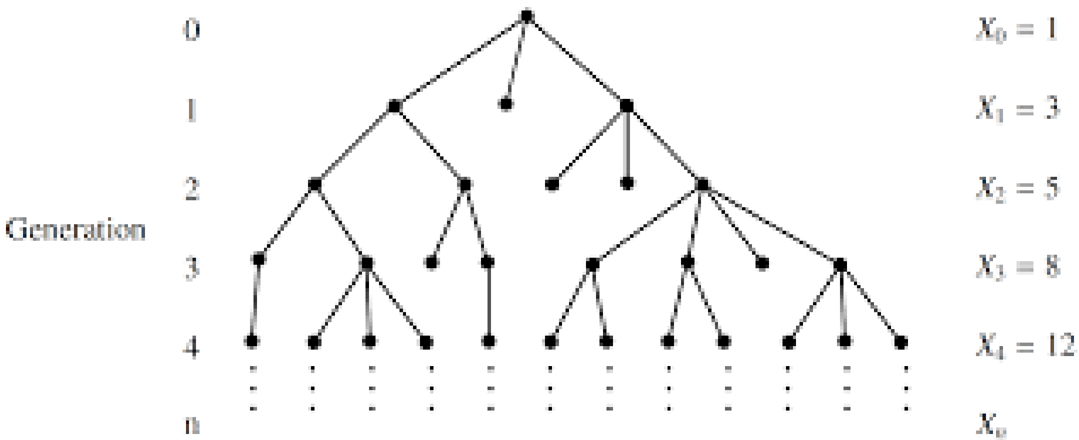


Figura 6: Grafo(Topologia) do Processo de Ramificação

Representação de um Processo de Ramificação

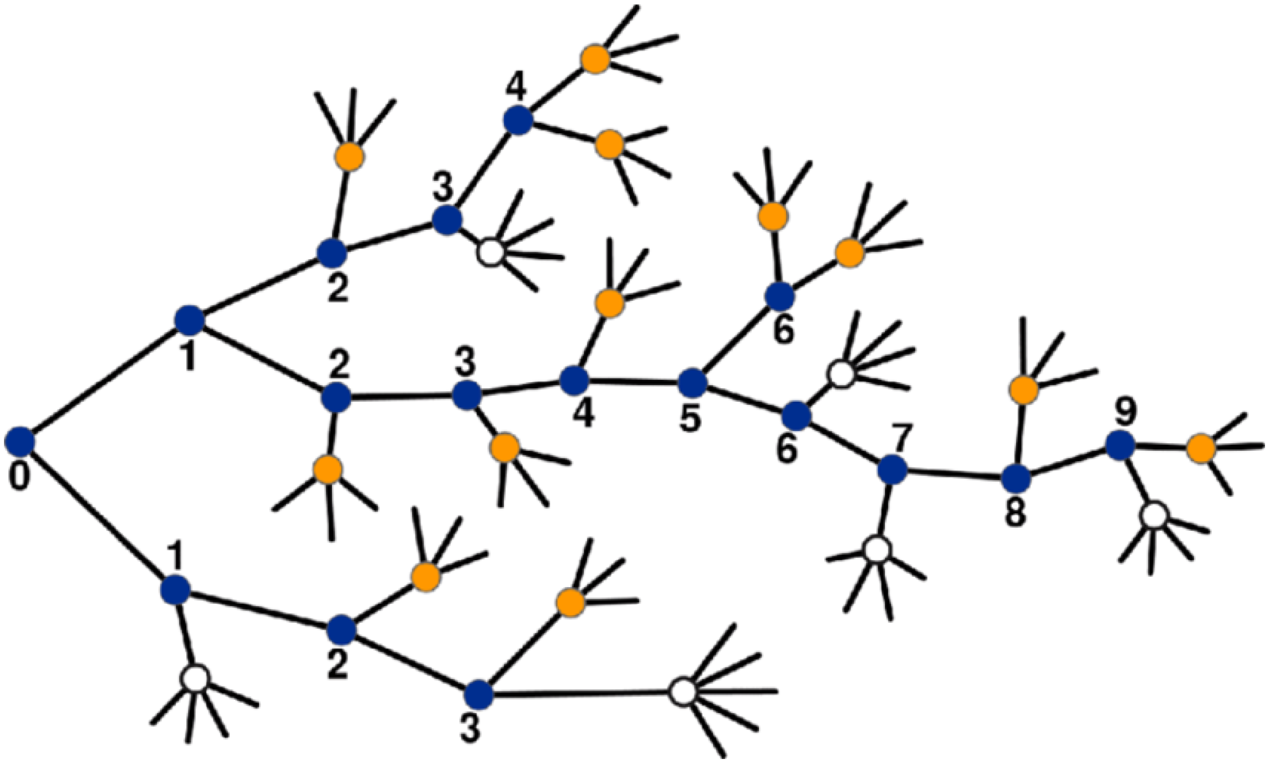


Figura 7: Grafo(Topologia) do Processo de Ramificação

Probabilidade de Transição

Considerando a sequência $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$, teremos que X_n é uma Cadeia de Markov. De fato, decorre da hipótese de independência dos dependentes de diferentes partículas que se soubermos que $X_n = i$, não importando como o processo chegou a i, a probabilidade de termos j partículas na geração $n+1$ será:

$$P_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i = j]$$

Como a distribuição dos Z_i é conhecida e eles são independentes, nos podemos determinar a distribuição da soma e obter a matriz de probabilidades de transição.

Exemplo

Considerando $Z_k \sim Poisson(\lambda), k = 1, \cdots, i$, *temos que* $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{i} Z_k \sim Poisson(\lambda i)$. *Com isso,*

$$P_{ij} = e^{-\lambda i}(\lambda i)^j / j!$$

Exemplo

Considerando $Z_k \sim Bin(d, p), k = 1, \cdots, i$, *temos que* $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{i} Z_k \sim Bin(di, p)$. *Com isso,*

$$P_{ij} = \binom{di}{j} p^j (1-p)^{di-j}$$

Exercícios

Exercício

Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *com* $E = \{0, 1, 2\}$, $\boldsymbol{\pi}^{(0)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *e cujas linhas da matriz de transição são dadas por* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *e* $(1, 0, 0)$
a) Determine $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 2)$
b) Determine $P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1)$
c) Determine $P(X_2 = 1, X_0 = 1 | X_1 = 0)$

Exercício

Para uma série de ensaios dependentes, a probabilidade de sucesso em qualquer ensaio é $p_k = (k+1)/(k+2)$, *onde k é o número de sucessos nos dois últimos ensaios. Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} P(\textit{Sucesso no n-ésimo ensaio}).$$

Exercícios

Exercício

Classifique os estados da cadeia dada pela matriz

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4/12 & 4/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 4/12 & 4/12 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Exercício

Considere uma cadeia cuja matriz de Markov com 3 estados cujas linhas da matriz de transição são (1/4,3/4,0), (1/3,1/3,1/3) e (0,1/4,3/4). Calcule (a) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$, *(b)* $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$, *(c)* $\boldsymbol{\pi}_1$, *(d)* $\boldsymbol{P}^{(2)}$ *(e)*$\boldsymbol{\pi}_2$.

Exercício

Considere a matriz $\boldsymbol{P}$ *dada abaixo, que é uma matriz de transição em um passo. Calcule a matriz de probabilidades de transição em 4 (quatro) passos.*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Exercício

Consideremos o passeio aleatório em $\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2\}$ *com* $p_{i,i+1} = p$ *e* $p_{i,i-1} = 1 - p = q, \forall i \in \boldsymbol{Z}$. *Como todos os estados se comunicam, então ou são todos recorrentes ou todos transitórios. Prove que se* $p = \frac{1}{2}$ *todos os estados serão recorrentes e se* $p \neq \frac{1}{2}$ *todos serão transitórios.*

Obs. *Notemos que basta verificar se o estado 0 é recorrente. Temos que* $p_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ *e* $n! \simeq n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ *(conhecida como aproximação de Stirling). Use que*

- *se* $\sum_{n \geq 1} p_{00}^{2n} = \infty$ *então 0 é recorrente*
- *se* $\sum_{n \geq 1} p_{00}^{2n} < \infty$ *então 0 é transitório*

Exercício

Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *a cadeia de Ehrenfest e suponha que* X_0 *tenha distribuição* $Binomial(d, 1/2)$. *Encontre a distribuição de* X_1.

Exercício

Considere o passeio casual de uma partícula nos inteiros $E = \{-N, -N+1, \cdots, N-1, N\}$, $N \geq 1$, *com probabilidades de transição dadas por*

$$p_{-N,-N+1} = 1 = p_{N,N-1} \quad e \quad p_{i,j} = \frac{1}{2} \quad se \quad j \in \{i-1, i+1\}, i \in \{-N+1, \cdots, N-1\}.$$

Determine a medida de probabilidade invariante da cadeia para $N = 2$.

Exercício

Uma partícula nos pontos $0, 1, 2, 3$ *e* 4 *de um círculo inicia seu movimento no estado* 0. *Em cada etapa ela tem probabilidade* p *de se mover para o seu vizinho da direita (sentido horário) e* $1 - p$ *para a esquerda. Seja* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *a posição da cadeia na* n*-ésima etapa*

(a) $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *é uma CM? Explique com detalhes.*

(b) Se for, determine a matriz de probabilidades de transição.

Exercício

Suponha que 6 bolas são colocadas em duas urnas A *e* B *e que 3 dessas bolas são vermelhas e o restante pretas. Inicialmente, 3 bolas são colocada na urna* A *e 3 na* B *ao acaso. A cada etapa uma bola é retirada aleatoriamente de cada urna e colocada na oposta. Seja* X_n *o número de bolas pretas na urna* A *após a* n*-ésima etapa.* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *é uma CM? Se for, determine a matriz de probabilidades de transição.*

Exercício

[**Modelo de Fila**] *Clientes utilizam um serviço com dois servidores (guichês). Em cada um dos guichês, independente dos outros e das possíveis chegadas, um usuário tem probabilidade* p_0 *de ser atendido durante um intervalo de tempo unitário e, se isso acontece o usuário seguinte começa a ser atendido no início do próximo intervalo de tempo. Suponha que um cliente chega ao sistema (fila) com probabilidade* p_1*, ou não chega ninguém, durante o intervalo de tempo unitário. Seja*
X_0*: número de clientes na fila no instante inicial*
X_n*: número de clientes na fila no instante* $n \geq 1$
Este problema pode ser formulado em termos de uma Cadeia de Markov? Por quê? Em caso positivo, indique quais são os estados e qual a matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$.

Exercício

[**Previsio do tempo**] *Suponha que o fato de chover ou não amanhã dependa apenas de se choveu ou não nos últimos dois dias (hoje e ontem). Se choveu nos últimos dois dias (estado 0), então choverá amanhã com probabilidade 0,7; se choveu hoje mas não ontem (estado 1), então choverá amanhã com probabilidade 0,5; se choveu ontem mas não hoje (estado 2), então choverá amanhã com probabilidade 0,4; se não choveu nos últimos dois dias (estado 3), então choverá amanhã com probabilidade 0,2. Seja* X_n *a condição do tempo no dia* n. *(a)* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *é uma CM? Explique com detalhes. (b) Se for, qual a matriz de transição de probabilidade desta cadeia?*

Exercício

Consideremos que o fato de chover ou não amanhã dependa apenas de se choveu ou não nos últimos três dias (hoje, ontem e anteontem). (a) Este sistema pode ser analisado através de uma CM? (b) Quais e quantos são os estados desta cadeia? (c) Suponha agora que se choveu nos últimos 3 dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,8; se não choveu nos últimos 3 dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,2; em qualquer outro caso o tempo será igual ao de hoje com probabilidade 0,6. Qual a matriz de transição?

Exercício

*[**Equilíbrio de Hardy-Weinberg**] Considere uma população de individuos onde cada um deles tem um particular par de genes e cada gen é classificado como sendo do tipo A ou do tipo a. Vamos assumir que as porcentagens de individuos que tem os pares de genes AA, aa ou Aa (= aA) são, respectivamente,* P_0, q_0 *e* r_0 *(com* $P_0 + q_0 + r_0 = 1$*). Quando dois individuos se "casam", cada um deles contribui com um de seus genes, escolhido ao acaso, para formar o seu descendente. Vamos assumir que os casamentos ocorrem ao acaso e que cada individuo pode casar com qualquer outro individuo. Determine as porcentagens de individuos na próxima geração cujos genes são* AA, aa *e* Aa*, chamando estas porcentagens de* p, q *e* r*, respectivamente. Qual a matriz de transição. (Sugestão: condicione sobre os genes dos genitores (pais))*

Exercício

Consideremos o Passeio Casual nos inteiros, com X_0 *a posição da partícula no instante inicial e* X_n *a posição da partícula no instante* n*. Calcule a probabilidade de transição de* n *passos quando a partícula parte do estado* i*, ou seja, calcule* $P(X_n = j | X_0 = i)$.

Exercício

Consideremos uma cadeia de Markov com 2 estados cuja matriz de transição é

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Mostre por indução matemática que a matriz de transição em n passos é dada por

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercício

Uma matriz de probabilidade de transição é dita duplamente estocástica se a soma em cada coluna também é 1, assim como a soma das linhas. Ou seja, $\sum_{i=1} P_{ij} = 1, \forall j$. Se tal cadeia é irredutível e aperiódica e consiste de $M+1$ estados: $0, 1, \cdots, M$, mostre que as probabilidades limites são dadas por

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \quad j = 0, 1, \cdots, M.$$

Dica: *apenas verifique a condição necessária.*

Exercício

Considere uma agência dos correios com dois guichês. Quando o cliente C chega à agência, ele percebe que já estão sendo atendidos os clientes A e B e ele será atendido tão logo algum guichê desocupe. Se o tempo gasto por cada guichê é exponencialmente distribuído com taxa λ*, qual é a probabilidade que o cliente C seja o último a sair da agência?*

Exercício

Para um processo de ramificação, calcule π_0 *quando*

(a) $P_0 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{3}{4},$

(b) $P_0 = \frac{1}{4}, \quad P_1 = \frac{1}{2}, \quad P_2 = \frac{1}{4},$

(c) $P_0 = \frac{1}{6}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \quad P_2 = \frac{1}{3},$

Exercício

Considere dois processos de Poisson independentes $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *e* $\{N_2(t), t \geq 0\}$. *Determine a probabilidade que hajam duas ocorrências do processo* $N_1(t)$ *antes que ocorra uma do processo* $N_2(t)$.

Exercício

Sejam $\{N_i(t), t \geq 0\}$ *dois processos de Poisson independentes, com taxas* λ_i, $i = 1, 2$. *Mostre que* $\{N(t), t \geq 0\}$, *com* $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, *é um processo de Poisson com taxa* $\lambda_1 + \lambda_2$.