Processos Estocásticos

Héliton R. Tavares

Universidade Federal do Pará
www.ufpa.br/heliton
heliton@ufpa.br

Índice

Definição

Definição

Sejam E um experimento e S um espaço amostral associado a E. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associada a um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma variável aleatória bidimensional (ou vetor aleatório).

Exemplo

Retira-se uma amostra de 20 alunos do curso de estatística da UFPA e anota-se a idade (X) e ano de ingresso no curso (Y). O vetor (X, Y) será bidimensional. Outras variáveis poderiam ser medidas.

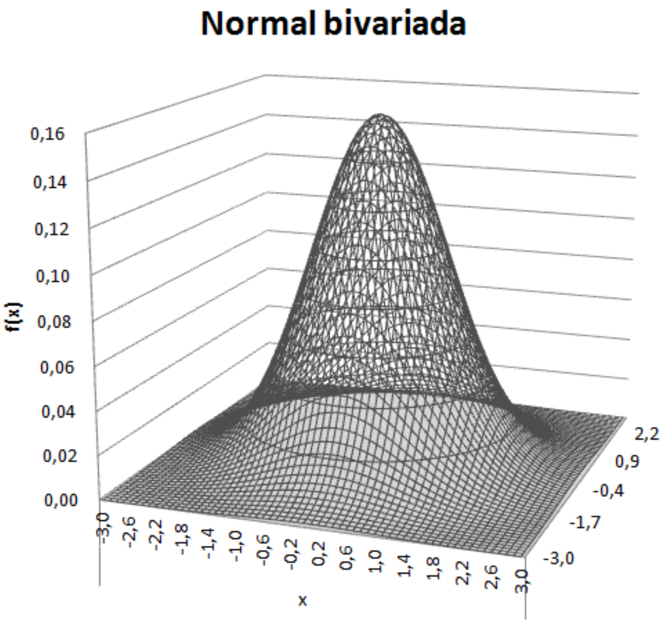
Definição

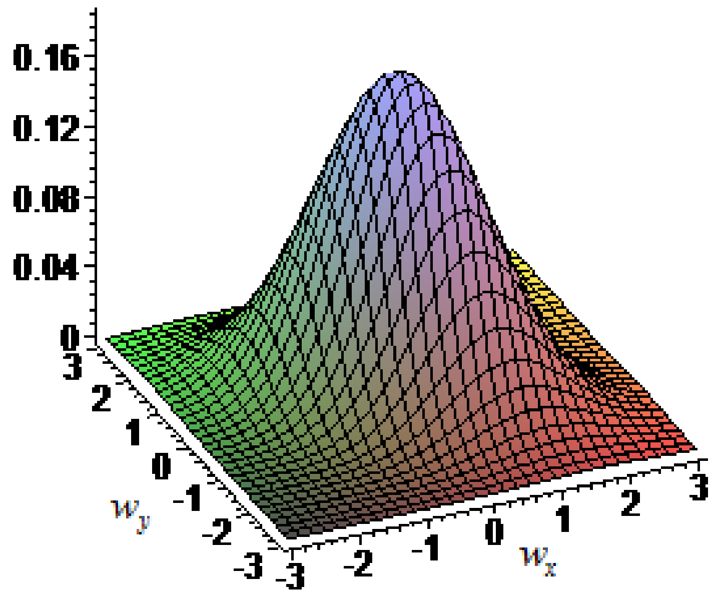
O vetor (X, Y) *será uma variável aleatória* ***Discreta*** *Bidimensional se o conjunto dos valores possíveis de* (X, Y) *for finito ou infinito enumerável. Isto é, os valores possóveis de* (X, Y) *possam ser representados por* $(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \ldots; \quad j = 1, 2, \ldots$

Definição

O vetor (X, Y) *será uma variável aleatória* ***Contínua*** *Bidimensional se* (X, Y) *puder tomar todos os valores em algum conjunto não-enumerável do plano auclidiano.*

Distribuições Bivariadas





Definição

Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensioal. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um valor $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i, Y = y_i)$ e satisfazendo as seguinte condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0, \forall (x, y)$.
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo $(x_i, y_j) \in R_{XY}$ é denominada a Função de Probabilidade Conjunta de (X, Y) . O conjunto $[x_i, y_j, \;\; p(x_i, y_j)]$, $\;\; i, \; j = 1, 2, \ldots$ é, algumas vezes, denominado Distribuição de Probabilidade Conjunta de (X, Y) .

OBS: No caso bidimensional, R_{XY} será um subconjunto do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o n^o obtido no primeiro dado, e Y o maior ou o n^o comum nos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) .

$$S = \begin{pmatrix} (1{,}1) & (1{,}2) & (1{,}3) & (1{,}4) & (1{,}5) & (1{,}6) \\ (2{,}1) & (2{,}2) & (2{,}3) & (2{,}4) & (2{,}5) & (2{,}6) \\ (3{,}1) & (3{,}2) & (3{,}3) & (3{,}4) & (3{,}5) & (3{,}6) \\ (4{,}1) & (4{,}2) & (4{,}3) & (4{,}4) & (4{,}5) & (4{,}6) \\ (5{,}1) & (5{,}2) & (5{,}3) & (5{,}4) & (5{,}5) & (5{,}6) \\ (6{,}1) & (6{,}2) & (6{,}3) & (6{,}4) & (6{,}5) & (6{,}6) \end{pmatrix}$$

Tabela 1: Resultados do lançamento de dois dados

Y \ X	1	2	3	4	5	6	Total
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	2/36	0	0	0	0	3/36
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	9/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36	11/36
Total	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	1

Exemplo

Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o nº obtido no primeiro dado, e Y a soma dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) .

Exemplo

Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o máximo dos dois resultados e Y a soma dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) .

Exemplo

Uma moeda perfeita é lançada 3 vezes. Sejam

X: *nº de caras obtidas nos dois primeiros lançamentos.*
Y: *nº de caras obtidas no último lançamento.*
Z: *nº Total de caras.*

Encontrar a Distribuição Conjunta de (X, Y, Z).

Tabela 2: Espaço amostral

Resultados	Probab	X	Y	Z
ccc	1/8	2	1	3
cc$\bar{c}$	1/8	2	0	2
c$\bar{c}$c	1/8	1	1	2
c$\bar{c}\bar{c}$	1/8	1	0	1
$\bar{c}$cc	1/8	1	1	2
$\bar{c}$c$\bar{c}$	1/8	1	0	1
$\bar{c}\bar{c}$c	1/8	0	1	1
$\bar{c}\bar{c}\bar{c}$	1/8	0	0	0
Total	1	8	4	12

Tabela 3: Distribuição Conjunta de (X, Y, Z)

(x, y, z)	Probabilidade
(2,1,3)	1/8
(2,0,2)	1/8
(1,1,2)	2/8
(1,0,1)	2/8
(0,1,1)	1/8
(0,0,0)	1/8
Total	1

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição

Seja (X, Y) *uma variável aleatória bidimensional contínua tomando todos os valores em alguma região* R_{XY} *do plano auclidiano. Uma função* f *que satisfaça as seguintes condições:*

i) $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \quad R_{XY}$

ii) $\iint\limits_{R_{XY}} f(x, y) dx dy = 1$

é denominada ***Função Densidade de Probabilidade Conjunta*** *de* (X, Y) .

OBS: No caso bidimensional, R_{XY} será um subconjunto do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$.

Obseervacões

Observação

1. *$f(x,y)$ não representa propriamente a probabilidade de coisa alguma. Esse valor pode, inclusive, ser maior que 1. Contudo, para Δx e Δy positivos e suficientemente pequenos, $f(x,y)\Delta x\Delta y$ é aproximadamente igual* $P(x-\Delta x \leq X \leq x+\Delta x, y-\Delta y \leq Y \leq y+\Delta y)$
2. *Assim como no caso unidimensional, adotaremos a conveção de que $f(x,y)=0$ se $(x,y)\notin R_{XY}$, de forma que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

3. *Se B for um evento no contradomínio de (X,Y) , teremos:*

$$P(B)=\sum_{B}\sum p(x_i,y_j)$$

Exemplo

Suponha que a variável aleatória (X, Y) *tenha f.d.p conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) *Calcule* $P(0 < X < 1, \quad 1 < Y < 2)$

b) *Desenhe a região* $B = \{X > Y\} = \{(x,y) : x > y\}$

c) *Calcule* $P(X > Y)$

Solução de a):

$$\begin{aligned} P(0<X<1, 1<Y<2) &= \int_1^2 \int_0^1 f(x,y)dxdy \\ &= \int_1^2 \int_0^1 e^{-(x+y)}dxdy = \int_1^2 e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^1 dy \\ &= \int_1^2 e^{-y} \ \ [-e^{-1}+1]dy = (1-e^{-1}) \ \ \left[-e^{-y}\right]_1^2 \\ &= (1-e^{-1})[-e^{-2}+e^{-1}] \simeq 0,147 \end{aligned}$$

Solução de b):

$$
\begin{aligned}
P(X > Y) &= \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} e^{-(x+y)}dxdy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_y^{+\infty} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}(0+e^{-y})dy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \left[\frac{-e^{-2y}}{2}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Aproximação Numérica: macro em VBA e R

```
Sub Expbi()
 n = 10 ^ 6
 For i = 1 To n
    x = Rnd(): y = Rnd() + 1  'x in (0,1) e y in (1,2)'
    f = Exp(-(x + y))
    Z = Rnd()
    If Z < f Then conta = conta + 1
 Next
 Prob = conta / n
 MsgBox "Probabilidade aproximada: " & Prob
End Sub
```

```
n=10000
X=runif(n,0,1)
Y=runif(n,1,2)
f=exp(-(X+Y))
Z=runif(n,0,1)
S=1*(Z<f)
cat("Probabilidade aproximada: ",mean(S),"\n")
```

Exemplo

Suponha que a variável aleatória (X, Y) *tenha f.d.p conjunta dada por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) *Verifique que integra 1*
b) *Desenhe a região* $B = \{X + Y \geq 1\}$
c) *Calcule* $P(X + Y \geq 1)$

Caso discreto

Exemplo (Caso discreto)

No exemplo dos dois dados:

$$P(X \geq 1, Y = 3) = \frac{5}{36}$$

função de distribuição acumulada $(f.d.a)$

Definição

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. A função de distribuição acumulada (f.d.a) F de (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Se F for a fda de uma v.a bidimensional contínua com fdp f, então:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

sempre que F for derivável.

Exemplo

Suponha que a v.a (X,Y) tenha fdp dada por
$f(x,y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0, y > 0$. *Encontre* $F(x,y)$.

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^y \int_0^x f(u,t)dudt \\
&= \int_0^y \int_0^x e^{-(u+t)}dudt = \int_0^y (-e^{-u+t}|_0^x)dt \\
&= \int_0^y [-e^{-(x+t)} + e^{-t}]dt = e^{-(x+t)} - e^{-t}|_0^y \\
&= e^{-(x+y)} - e^{-y} - e^{-x} + 1
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[-e^{-(x+y)} + e^{-y}] = e^{-(x+y)} = f(x,y)
$$

Distribuiçao de Probabilidade Marginal

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Desejamos obter a Distribuição (Marginal) de Probabilidade de X e de Y.
Da *Teoria de Conjuntos* temos que se A é um subconjunto de S e $B_i, i = 1, \cdots, n$, formam uma partição disjunta (mutuamente exclusiva) de S, ou seja, $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, então $C_i = A \bigcap B_i$ são disjuntos. E, ainda,

$$A = A \bigcap S = A \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \bigcap B_i)$$

Com isso,

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \bigcap B_i).$$

Assim, se $A = \{X = x\}$ e $B_i = \{Y = y_i\}$ então

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x, Y = y_i). \tag{1}$$

Exemplo

Um dado perfeito é lançado 2 vezes. Sejam

X*: nº obtido no primeiro dado*
Y*: Y o maior ou o nº comum nos dois dados*

Tabela 4: Resultados do lançamento de dois dados

Y \ X	1	2	3	4	5	6	Total
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/36	2/36	0	0	0	0	3/36
3	1/36	1/36	3/36	0	0	0	5/36
4	1/36	1/36	1/36	4/36	0	0	7/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	0	9/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36	11/36
Total	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	1

Distribuições Marginais de X e Y

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+\ldots+P(X=1,Y=6) \\
&= \frac{6}{36}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Distribuição Marginal de X

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
$p(x_i)$	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	6/36	1

Distrbuição Marginal de Y

y_i	1	2	3	4	5	6	Total
$p(y_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

a) Caso Discreto:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= P(X = x_i) = P(X = x_i \ , \ Y = y_1 \ ou \ X = x_i \ , \ Y = y_2 \ ou \ \ldots) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i \, y_j). \\ q(y_i) &= P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) \end{aligned}$$

A função p, definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa a distribuição de probabilidade marginal de X, e a função q, representa distribuição de probabilidade marginal de Y.

b) Caso Contínuo:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad \text{f.d.p marginal de } X$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{f.d.p marginal de } Y$$

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= P(c \leq X \leq d \, , -\infty < Y < +\infty) \\ &= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = \int_c^d g(x)dx \end{aligned}$$

Exemplo

Dois característicos do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória com f.d.p conjunta dada por:

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy), \quad 0 \leq x \leq 1 \;\; 0 \leq y \leq 1$$

Encontrar as f.d.p's marginais de X e Y.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_0^1 2(x + y - 2xy)dy = 2(xy + \frac{y^2}{2} - xy^2)|_0^1 \\ &= 2(x + \frac{1}{2} - x) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $g(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \Rightarrow \quad X$ tem distribuição $U(0, 1)$.

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^1 2(x + y - 2xy)dx = 2(\frac{x^2}{2} + yx - x^2y)|_0^1 \\ &= 2(\frac{1}{2} + y - y) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $h(y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \Rightarrow \quad Y$ tem distribuição $U(0, 1)$.

Distribuição Uniforme no Plano

Definição

Dizemos que a variável aleatória contínua bidimensional é uniformemente distribuída sobre a região R do plano euclidiano quando:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Area(R)} & (x,y) \in R \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Exemplo

Suponha que a variável aleatória (X, Y) *seja uniformemente distribuída sobre a região* R *definida por* $R = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$. *Encontre a fdp conjunta de* (X, Y) *e as fdp's marginais de* X *e* Y.

$$f(x, y) = \frac{1}{Area(R)}$$

$$\text{Area (R)} = \int_0^2 \int_0^1 dxdy = 2$$

$$\text{Logo:} \quad f(x, y) = \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_0^2 \frac{1}{2}dy = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 2$$

Exemplo

Suponha que a variável aleatória (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre a região R definida por $R = \{(x, y) : 0 < x < 1, x^2 < y < x\}$. Encontre a f.d.p conjunta de (X, Y) e as fdp's marginais de X e Y.

$$f(x, y) = \frac{1}{Area(R)}$$

$$\text{Area (R)} = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Logo:} \quad f(x, y) = 6 \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad x^2 < y < x$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^{x} 6 dy = 6(x - x^2)$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y)$$

$$g(x) = 6(x - x^2) \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$h(y) = 6(\sqrt{y} - y) \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1$$

Probabilidades Condicionais: Caso Discreto:

Função de probabilidade condicional de X dado $Y = y_j$.

$$p(x_i \mid y_j) = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \;\; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p(x_i \;\; y_j)}{q(y_j)} \quad \text{se} \quad q(y_j) > 0.$$

Função de probabilidade condicional de Y dado $X = x_i$.

$$q(y_j \mid x_i) = P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i \;\; Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p(x_i \;\; y_j)}{p(x_i)} \quad \text{se} \quad p(x_i) > 0.$$

OBS: Para um dado j, $p(x_i \mid y_j)$ satisfaz todas as condições de uma distribuição de probabilidade:

i) $p(x_i \mid y_j) \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)} = \frac{1}{q(y_j)} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i \;\; y_j) = \frac{1}{q(y_j)} q(y_j) = 1$

Probabilidades Condicionais: Caso contínuo

Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com f.d.p marginais de X e Y representadas por $h(x)$ e $g(y)$, respectivamente.

- A f.d.p condicional de X, dado $Y = y$, é definida por:

$$g(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad , \quad h(y) > 0$$

- A f.d.p condicional de Y, dado $X = x$, é definida por:

$$h(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad , \quad g(x) > 0$$

Observação

As f.d.p's condicionais satisfazem todas as condições para uma f.d.p unidimensional. Para Y fixado, temos:

i) $g(x \mid y) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x \mid y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \frac{1}{h(y)} h(y) = 1$

Exemplo

Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x,y) = 6 \quad , \quad 0 < x < 1, \quad x^2 < y < x$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= 6(x - x^2) \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\
h(y) &= 6(\sqrt{y} - y) \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1 \\
g(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{6}{6(\sqrt{y} - y)} = \frac{1}{\sqrt{y} - y} \quad ; \quad y < x < \sqrt{y} \\
h(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{6}{6(x - x^2)} = \frac{1}{x - x^2} \quad ; \quad x^2 < y < x, \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

Exercício

Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Exemplo

Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam X *=* n^o *de azes obtidos e* Y *=* n^o *de damas obtidas.*

a) Distribuição Conjunta de (X, Y)

Y/X	0	1	2	Total
0	0,714	0,133	0,004	0,851
1	0,133	0,012	0	0,145
2	0,004	0	0	0,004
Total	0,851	0,145	0,004	1,00

b) Distribuição Marginal de X

x_i	0	1	2	Total
$p(x_i)$	0,851	0,145	0,004	1,00

c) Distribuição Marginal de Y

y_i	0	1	2	Total
$p(y_i)$	0,851	0,145	0,004	1,00

$P(x \mid y) =?$

$$y = 0 \quad \implies p(x \mid y = 0) =?$$

$$P(x = 0 \mid y = 0) = \frac{p(0,0)}{q(0)} = \frac{0,714}{0,851} = 0,839$$

$$P(X = 1 \mid y = 0) = \frac{p(1,0)}{q(0)} = \frac{1,33}{0,851} = 0,156$$

$$P(X = 2 \mid y = 0) = \frac{p(2,0)}{q(0)} = \frac{0,004}{0,851} = 0,005$$

Distribuição Condicional de X, dado $Y = 0$:

$p(x \mid y = 0)$	0	1	2	Total
$p(x \mid y = 0)$	0,839	0,156	0,005	1,00

Distribuição Condicional de X, dado $Y = 1$:

x_i	0	1	Total
$p(x_i \mid y = 1)$	0,917	0,083	1,00

Distribuição Condicional de X, dado $Y = 2$:

$$P(X = 0 \mid Y = 2) = 1$$

Distribuição condicional de Y, dado $X = 0$:

y_i	0	1	2	Total
$q(y_i \mid 0)$	0,839	0,156	0,005	1,00

Distribuição condicional de Y, dado $X = 1$:

y_i	0	1	Total
$q(y_i \mid 1)$	0,917	0,083	1,00

Distribuição condicional de Y, dado $X = 2$:

$$P(Y = 0 \mid X = 2) = \frac{0,004}{0,004} = 1$$

Independência

Definição (Variáveis aleatórias independentes)

a) *Seja* (X, Y) *uma v.a* ***discreta*** *bidimensional. Diremos que* X *e* Y *são v.a's independentes se, e somente se,* $P(x_i, y_i) = p(x_i)q(y_j)$ *para quaisquer* i *e* j*. Isto é,* $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ *para todo* i *e* j*.*

b) *Seja* (X, Y) *uma v.a* ***contínua*** *bidimensional. Diremos que* X *e* Y *são v.a's independentes se, e somente se,* $f(x, y) = g(x)h(y)$ *para todo* (x, y)*, onde* f *é a f.d.p conjunta, e* g *e* h *são as f.d.p marginais de* X *e* Y*, respectivamente.*

Observação

É frequente denotarmos: X *e* Y *são v.a.i., também* $X \perp Y$*, ou ainda* $X \perp\!\!\!\perp Y$*. No caso contrário, usamos* $X \not\perp Y$ *ou* $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

Exemplo

1. Suponha que uma máquina seja utilizada para determinada tarefa durante a manhã e para uma tarefa diferente durante a tarde. Sejam X e Y, respectivamente, o nº de vezes que a máquina para por defeito de manhã e à tarde. A tabela a seguir dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y). Verifique se X e Y são independentes.

Y\X	0	1	2	Total
0	0,1	0,2	0,2	0,5
1	0,04	0,08	0,08	0,2
2	0,06	0,12	0,12	0,3
Total	0,20	0,40	0,40	1,00

$$p(0,0) = 0,1 = 0,2 \times 0,5 = p\,(0) \times q(0)$$

$$p(0,1) = 0,04 = 0,2 \times 0,2 = p(0) \times q(1)$$

$$p(0,2) = 0,06 = 0,2 \times 0,3 = p(0) \times q(2)$$

$$p(1,0) = 0,2 = 0,4 \times 0,5 = p(1) \times q(0)$$

$$p(1,1) = 0,08 = 0,4 \times 0,2 = p(1) \times q(1)$$

$$p(1,2) = 0,12 = 0,4 \times 0,3 = p(1) \times q(2)$$

Logo, $p(x_i, y_j) = p(x_i) \times q(y_j), \forall (i,j) \Rightarrow X \, e \, Y$ são independentes

Exemplo

Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua f.d.p conjunta seja dada pela função abaixo. Verifique se Xe Y são independentes.

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \quad ; \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x} \left[-e^{-y} \Big|_0^{\infty} \right] = e^{-x} [0+1] = e^{-x}$$

$$\therefore g(x) = e^{-x} \quad ; \ x \geq 0$$

Da mesma forma,

$$\therefore h(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dx = e^{-y}$$

$$h(y) = e^{-y} \ ; \ y \geq 0$$

Logo,

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x} \cdot e^{-y} = g(x)h(y) \quad \Rightarrow \quad X \text{ e } Y \text{ são independentes } (X \perp\!\!\!\perp Y).$$

Definição alternativa de independência

Teorema (Definição alternativa de independência)

a) *Seja* (X, Y) *uma variável aleatória* ***discreta*** *bidimensional. Nesse caso,* X *e* Y *serão independentes se, e somente se,* $p(x_i|y_j) = p(x_i)$ *para todo* i *e* j *[ou, o que é equivalente se, e somente se,* $q(y_j|x_i) = q(y_j)$ *para todo* i *e* j *].*

b) *Seja* (X, Y) *uma variável aleatória* ***contínua*** *bidimensional. Nesse caso,* X *e* Y *serão independentes se, e somente se,* $g(x|y) = g(x)$*, ou equivalente, se e somente se,* $h(y|x) = h(y)$*, para todo* (x, y)

Teorema

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Sejam A e B eventos cuja ocorrência (ou não ocorrência) dependa apenas de X e Y, respectivamente. Então, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, teremos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Exemplo

Sejam X e Y duas v.a. independentes. Serão independentes, por exemplo,

i) $A = \{X > a\}$ *e* $B = \{Y < b\}$, *onde a, b são constantes;*

ii) $A = \{X \in (-\infty, a)\}$ *e* $B = \{Y \in (a, \infty)\}$.

Teorema

Sejam X e Y duas v.a. independentes (v.a.i.). Quaisquer funções isoladas de X e Y também serão independentes. Ou seja, sendo $Z = g(X)$ e $W = h(Y)$, então Z e W serão independentes.

Exemplo

Sejam X e Y duas v.a. independentes. Serão independentes, por exemplo,

i) $Z = X^a$ e $W = (Y - b)/c$, onde a, b e c são constantes;

ii) $Z = e^{t_1 X}$ e $W = e^{t_2 Y}$, onde t_1 e t_2 são constantes.

Observação

Este teorema é extremamente importante e pode ser generalizado para um número maior de variáveis aleatórias. Por exemplo, se temos variáveis $X_1, X_2, \cdots, X_n$, então funções de subconjuntos disjuntos de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ serão independentes, tais como $Y_1 = g(X_1, X_2)$ e $Y_2 = h(X_3, \cdots, X_n)$, $n \geq 3$.

Independência Condicional

Uma outra propriedade importante é a *Independência Condicional* (também chama da de *Independência Local*), necessária em várias situações para fins de desenvolvimento de métodos de estimação.

Definição (Variáveis aleatórias condicionalmente independentes)

a) *Seja* (X, Y) *uma v.a.* ***discreta*** *e* Z *uma v.a. Diremos que* X *e* Y *são v.a.'s condicionlmente independentes em* Z *se, e somente se,* $P(x_i, y_j|z_k) = p(x_i|z_k)q(y_j|z_k)$ *para quaisquer* i *e* j*, e cada* k*. Isto é,*
$P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) = P(X = x_i, Z = z_k)P(Y = y_j, Z = z_k)$.

b) *Seja* (X, Y) *uma v.a* ***contínua*** *bidimensional. Diremos que* X *e* Y *são v.a's condicionlmente independentes se, e somente se,* $f(x, y|z) = g(x|z)h(y|z)$ *para todo* (x, y)*, e cada* z*.*

c) *A definição é similar para o caso em que* X *e* Y *são v.a.'s discretas e* Z *é uma v.a. contínua:* $P(x_i, y_j|z) = p(x_i|z)q(y_j|z)$.

d) *A generalização é natural para um número maior de v.a.'s:*

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n|z) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|z).$$

Algumas funções de variáveis aleatórias

Seja (X, Y) uma v.a. e $Z = H(X, Y)$ uma função de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Desejamos obter a distribuição de probabilidade de Z. Primeiro temos que observar que Z é uma v.a.

Exemplo

Exemplos de funções de v.a.

$$\begin{aligned} Z &= X + Y, & Z &= X - Y, \\ Z &= XY, & Z &= \frac{X}{Y}, \\ Z &= \min(X, Y), & Z &= \max(X, Y). \end{aligned}$$

Exemplo

Duas linhas de produção fabricam um certo tipo de peça. Suponha que a capacidade (em qualquer dia) seja 5 peças na linha I e 3 peças na linha II. Admita que o número de peças realmente produzidas em qualquer linha seja uma variável aleatória, e que (X, Y) *represente a variável aleatória bidimensional que fornece o número de peças produzidas pela linha I e a linha II, respectivamente.*

A tabela a seguir dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y).

Y\X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1,00

Assim, $p(2,3) = P(X = 2, Y = 3) = 0,04$ etc. Definindo $B=$ {*Mais peças são produzidas pela linha I que pela linha II*} encontraremos que

$P(B) = P(X > Y) = \boxed{0{,}01+ 0{,}03+ 0{,}05+ 0{,}07+ 0{,}09} + \boxed{0{,}04+ 0{,}05+ 0{,}06+ 0{,}08} +$

$\boxed{0{,}05+ 0{,}05+ 0{,}06} + \boxed{0{,}06+ 0{,}05} = \boxed{0{,}75}.$

Encontre a distribuição de probabilidade das seguintes v.a's:
$U =$ mín $(X, Y) =$ menor nº de peças produzidas pelas duas linhas.
$V =$ máx$(X, Y) =$ maior nº de peças produziadas pelas duas linhas.
$W = X + Y =$ nº total de peças produzidas pelas duas linhas.

DISTRIB. DE $U = Mín(X, Y)$

u_i	0	1	2	3	Total
$p(u_i)$	0,28	0,30	0,25	0,17	1,00

DISTRIB. DE $V = Máx(X, Y)$

v_i	1	2	3	4	5	Total
$p(v_i)$	0,04	0,16	0,28	0,24	0,28	1,00

DISTRIB. DE $W = X + Y$

w_i	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
$P(w_i)$	0,02	0,06	0,13	0,19	0,24	0,19	0,12	0,05	1,00

Soma de Variáveis Aleatórias

Observação

A soma de variáveis é um dos casos mais importantes para a Estatística, pois dela decorrerão as principais propriedades da média amostral (que é a soma dividida pelo tamanho da amostra), variância amostral e muitos outros estimadores. Por simplicidade, tratemos separadamente os casos discretos e contínuo.

Resultado

Seja (X, Y) uma v.a discreta. Para obtermos a distribuição da variável $Z = X + Y$ devemos considerar todas as possibilidades para X e Y:

$$P(Z = z) = \sum_{k} P(X = k, Y = z - k) \overset{v.a.i.}{=} \sum_{k} P(X = k)P(Y = z - k).$$

Os valores k que entrarão na soma sempre dependerão das distribuições de X e de Y.

Soma de Binomiais Independentes

Exemplo

Sejam X e Y v.a.i. com distribuições $Bin(n_1, p)$ e $Bin(n_2, p)$, respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

Temos que obter $P(Z = z)$. Vale notar que z é um valor inteiro e que a v.a. X só pode assumir valores de 0 a n_1. Assim, para $z = 0, 1, 2, \cdots, n_1 + n_2$, temos

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{k=0}^{n_1} P(X = k)P(Y = z - k), \text{ com } z - k \geq 0 \Rightarrow k \leq z. \\
&= \sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1 - k} \times \binom{n_2}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{n_2 - (z-k)} \\
&= p^z (1-p)^{n_1 + n_2 - z} \sum_{k=0}^{z} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{z-k} \\
&= \binom{n_1 + n_2}{z} p^z (1-p)^{n_1 + n_2 - z}.
\end{aligned}$$

Portanto, $Z = X + Y \sim Bin(n_1 + n_2, p)$. Esse fato é bastente intuitivo, mas por quê?

Soma de Poissons Independentes

Exemplo

Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

Temos que obter $P(Z = z)$. Inicialmente devemos notar que z é um valor inteiro e que a v.a. X só pode assumir valores de 0 a z. Assim, para $k = 0, 1, 2, \cdots, z$, temos

$$
\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)P(Y = z - k), \text{ com } z - k \geq 0 \Rightarrow k \leq z. \\
&= \sum_{k=0}^{z} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \times \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{z-k}}{(z-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{z} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{z-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{k=0}^{z} \binom{z}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{z-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}
\end{aligned}
$$

Portanto, a soma de v.a. Poissons também é Poisson, com parâmetro igual à soma dos parâmetros. Esse fato também é bastente intuitivo, mas por quê?

Soma de Variáveis Aleatórias Contínuas

Observação

De forma similar ao caso de variáveis discretas, a soma de v.a. contínuas pode ser obtida "somando-se"(que neste caso é a integral) para todos os valores x *de* X*, ou para os valores* y *de* Y*.*

Resultado

Seja (X, Y) *uma v.a contínua com f.d.p conjunta* f_{XY} *e marginais* f_X *e* f_Y*. Para obtermos a distribuição da variável* $Z = X + Y$ *usaremos:*

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)dx \overset{v.a.i.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y, y)dy \overset{v.a.i.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy \end{aligned}$$

Soma de Exponenciais Independentes

Exemplo

Sejam $X \sim Exp(\lambda_1)$ *e* $Y \sim Exp(\lambda_2)$, *independentes, qual a distribuição de* $Z = X + Y$*?*

Soma de Normais-Padrão [N(0,1)] Independentes

Exemplo

Sejam $X \sim N(0,1)$ *e* $Y \sim N(0,1)$*, independentes, qual a distribuição de* $Z = X + Y$*?*

Exercício

Sejam $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$*, independentes, qual a distribuição de* $Z = X + Y$*?*

Procedimento mais geral

No geral, se (X, Y) for uma v.a contínua e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma v.a contínua. Qual a f.d.p de Z? Em alguns casos (soma, diferença, por exemplo) podemos obtê-la diretamente pelas expressões apresentadas, mas em outros tem que haver um procedimento mais geral, que também vale nos casos citados.

Observação

A solução é a versão bidimensional da transformação de variáveis do caso unidimensional, em que temos uma v.a. X com fdp $f(x)$ e uma transformada $Y = H(X)$. Então, a fdp g de Y é dada por $g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$.

- Se $X \sim U(0,1)$, qual a distribuição de $Y = 1 - X$?
- Se $X \sim U(0,1)$, qual a distribuição de $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$?
- Se $X \sim N(0,1)$, qual a distribuição de $Y = -X$?

Procedimento para obter a fdp de $Z = H_1(X, Y)$

1º) Introduzir uma segunda v.a: $W = H_2(X, Y)$;

2º) Obter a f.d.p conjunta de Z e W (vamos denominar esta conjunta de $K(z, w)$)

3º) Integra-se a f.d.p conjunta $K(z, w)$ com relação a W e obtém-se a f.d.p de Z:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z, w) dw$$

1. Como escolher a v.a W apropriada?
2. Como encontrar $K(z, w)$?

   - Deve-se fazer a escolha mais simples para W.
   - O Teorema a seguir indica como encontrar $K(z, w)$.

O Jacobiano da Transformação

Teorema

Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional com f.d.p conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam às seguintes condições:

a) *As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser univocamente resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = G_1(z, w)$ e $y = G_2(z, w)$.*

b) *As derivadas parciais $\partial x/\partial z$, $\partial x/\partial w$, $\partial y/\partial z$ e $\partial y/\partial w$ existem e são contínuas.*

Nessas circunstâncias, a f.d.p conjunta de (Z, W), isto é, $k(z, w)$ é dada pela seguinte expressão: $k(z, w) = f(x, y)\ |J(z, w)|$, onde $J(z, w)$ é o determinante 2×2 :

$$J(z, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Caso particular: Função SOMA $Z = X + Y$

Para o caso da função soma, $Z = X + Y$, geralmente escolhemos $W = X$. Neste caso teremos

$$\left\{\begin{array}{lcl} Z & = & \mathrm{X+Y} \\ W & = & \mathrm{X} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x = & w \\ y = & z - w \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} x = & G_1(z,w) \\ y = & G_2(z,w) \end{array}\right.$$

Portanto, $J = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -1$

$K(z,w) = f(G_1(z,w), G_2(z,w)) \times |J| = f(w,\ z-w) \times |-1| = f(w,\ z-w)$
Com isso, a densidade de Z é dada por

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z,w)dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

que é a mesma expressão já apresentada.

Soma 2 de Uniformes: distribuição triangular

Exemplo

Sejam X e Y v.a's independentes, cada uma tendo distribuição Uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Z = X + Y$. Encontre a f.d.p de Z.

$X \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = I_{(0,1)}(x); \quad Y \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = I_{(0,1)}(y)$

$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = f_X(x) = I_{(0,1)}(x) \times I_{(0,1)}(y)$

$$\left\{ \begin{array}{lll} Z & = & \text{X+Y} \\ W & = & \text{X} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} x = & & \text{w} \\ y = & & z - w \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -1$$

$$\begin{aligned} K(z,w) &= f(x,y) \times |J| = f(w,\ z-w) \times |-1| = I_{(0,1)}(w) I_{(0,1)}(z-w) \\ &= I_{(0,1)}(w) I_{(w,1+w)}(z), \quad \text{pois} \quad 0 \le z - w \le 1 \Leftrightarrow w \le z \le 1 + w \end{aligned}$$

Precisamos agora integrar com relação a w, lembrando que $z \in (0,2)$

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(z,w)dw = \left\{ \begin{array}{lll} \int_0^z K(z,w)dw & ; & 0 \le z \le 1 \\ \int_{z-1}^1 K(z,w)dw & ; & 1 < z \le 2 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{lll} \int_0^z dw & ; & 0 \le z \le 1 \\ \int_{z-1}^1 dw & ; & 1 < z \le 2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lll} z & ; & 0 \le z \le 1 \\ 2 - z & ; & 1 < z \le 2 \end{array} \right. = 1 - |1 - z|. \end{aligned}$$

Aproximação Numérica: R (LGN/TCL)

```
# SOMA DE 2 V.A. U(0,1)
n=10^5
X=runif(n); Y=runif(n)
Z=X+Y
z=seq(0,2,.1); z
H=hist(Z,breaks=z,plot=F); H
plot(H$mids,H$density)
fz=1-abs(z-1)
# fz=z*(z<1)+(2-z)*(z>1)
lines(z,fz)
```

```
# SOMA DE K V.A. U(0,1)
n=10^5; K=3 # Numero de U(0,1) somadas
X=runif(n*K); dim(X)=c(n,K)
Z=rowSums(X)
z=seq(0,K,.1); z
H=hist(Z,breaks=z,plot=F); H
plot(H$mids,H$density)
if (K==2) {fz=1-abs(z-1); lines(z,fz)}
fn=dnorm(z,mean=K/2, sd=sqrt(K/12)); lines(z,fn)
```

Exemplo

Suponha-se que estejamos fazendo mira em um alvo circular, de raio unitário, que tenha sido colocado de modo que seu centro se situe na origem de um sistema de coordenadas regulares conforme a figura. Admita-se que as coordenadas (X, Y) *do ponto de impacto estejam uniformemente distribuídas sobre o circulo. Isto é,* $f(x, y) = 1/\pi$, *se* (x, y) *estiver dentro (ou na circunferência) do círculo,* $f(x, y) = 0$, *se em qualquer outra parte. Obter a densidade da variável aleátória* R, *que representa a distância da origem, ou seja,* $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Saída por Cordenadas Polares. Temos que

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} I_A(x,y), \quad A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1.\}$$

Devemos encontrar a f.d.p conjunta de Φ e R.

$$\begin{cases} R = & \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Phi = & \text{arctg(Y/X)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = tg\,\phi \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & r\,cos\,\phi \\ y = & r\,sen\,\phi \end{cases} \Rightarrow J = r$$

$$K(\phi, r) = f(x,y)|r| = f(rcos\phi, rsen\,\phi) \cdot r = \tfrac{1}{\pi} \cdot r = \tfrac{r}{\pi} \Rightarrow \boxed{K(\phi, r) = \frac{r}{\pi} I_{(0,1)}(r) I_{(0,2\pi)}(\phi)}$$

$$\therefore \quad g(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\phi, r) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi}\, d\phi \; = \; \frac{r}{\pi}\, \phi \, \Big|_0^{2\pi} \; = \; \frac{r}{\pi}\, 2\pi - 0 = 2r$$

$$\boxed{g(r) = 2r I_{(0,1)}(r)}$$

ALVO CIRCULAR: $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

```
# FUNÇÃO GENÉRICA: ALVO CIRCULAR
n=10^5
X=runif(n); Y=runif(n)
R=sqrt(X^2+Y^2) ; MAT=cbind(X,Y,R) ;
A=R<1  # Linhas de (X,Y) com R<1
MAT=MAT[A,];  plot(MAT[,1],MAT[,2])
z=seq(0,1,.1); z
H=hist(R[A],breaks=z,plot=F); H
plot(H$mids,H$density)
fn=2*z
lines(z,fn)
```

Produto de Variáveis Aleatórias Independentes

Teorema

Seja (X, Y) *uma v.a contínua bidimensional com* X *e* Y *independentes. Seja* $V = XY$*. Neste caso, a f.d.p de* V*, digamos* p*, é dada por:*

$$p(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\, h\left(\frac{v}{w}\right) \left|\frac{1}{w}\right| dw.$$

Demonstração:

$$\left\{\begin{array}{l} v = xy \\ w = x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = w \\ y = \frac{v}{w} \end{array}\right. \Rightarrow J = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{v}{w^2} & \frac{1}{w} \end{array}\right| = \frac{1}{w}$$

$$\boxed{\therefore K(v, w) = f\left(w, \frac{v}{w}\right) \cdot |J| = g(w) \cdot h\left(\frac{v}{w}\right) \cdot \left|\frac{1}{w}\right|}$$

- Os valores de v para os quais $p(v) > 0$ dependem dos (x, y) para os quais $f(x, y) > 0$.
- Podemos subdividir a equação em duas parcelas:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)h\left(\frac{v}{w}\right) \cdot \left|\frac{1}{w}\right| dw = \int_{0}^{+\infty} g(w)h\left(\frac{v}{w}\right) \cdot \frac{1}{w}\, dw - \int_{-\infty}^{0} g(w)h\left(\frac{v}{w}\right) \cdot \frac{1}{w}\, dw$$

Exemplo

Suponha que temos um circuito no qual tanto a corrente I como a resistência R variem de algum modo aleatório. Particularmente, suponhamos que I e R sejam variáveis aleatórias contínuas independentes com as com as fdp's abaixo. Obter a distribuição de $E = I \times R$.

$$g(i) = 2iI_{(0,1)}(i), \quad h(r) = \frac{r^2}{9} I_{(0,3)}(r)$$

$$p(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w) \cdot h\left(\frac{e}{w}\right) \cdot \left|\frac{1}{w}\right| dw = \int_{-\infty}^{+\infty} g(i) \cdot h\left(\frac{e}{i}\right) \cdot \left|\frac{1}{i}\right| di = \int_{\frac{e}{3}}^{1} 2i \cdot \frac{e^2}{9\,i^2} \cdot \frac{1}{i}\ di$$

Notando inicialmente que $E = I \times R \in (0,3)$, temos que $I_{(0,3i)}(e) = I_{(e/3,1)}(i)$

$$p(e) = \int_{\frac{e}{3}}^{1} \frac{2e^2}{9\,i^2}\, di = \frac{2e^2}{9} \left[-\frac{1}{i} \Big|_{\frac{e}{3}}^{1} \right] = \frac{2e^2}{9} \cdot \left[-1 + \frac{3}{e} \right] = \frac{2e}{9}(3-e)$$

$$\boxed{\therefore p(e) = \frac{2e}{9}(3-e) I_{(0,3)}(e)}$$

```
# PRODUTO DE DUAS V.A.
n=10^6
U1=runif(n); I=sqrt(U1)    # Método da Inversa
U2=runif(n); R=3*U2^(1/3)  # Método da Inversa
E=I*R; hist(E)
quantile(E,probs=seq(0,1,.1))
e=seq(0,3,.1); z
H=hist(E,plot=F); H
plot(H$mids,H$density)
fn=2*e/9*(3-e)
lines(e,fn)
```

Uma forma mais geral de geração de variáveis aleatórias é através de sua Função de Distribuição $F_X(x) = P(X \leq x) \in [0, 1]$, chamado *Método da Transformação Inversa*. Gerando $Y \sim U(0, 1)$, e resolvendo $Y = F(X)$, chegamos a $X = F^{-1}(Y)$ com a distribuição desejada.

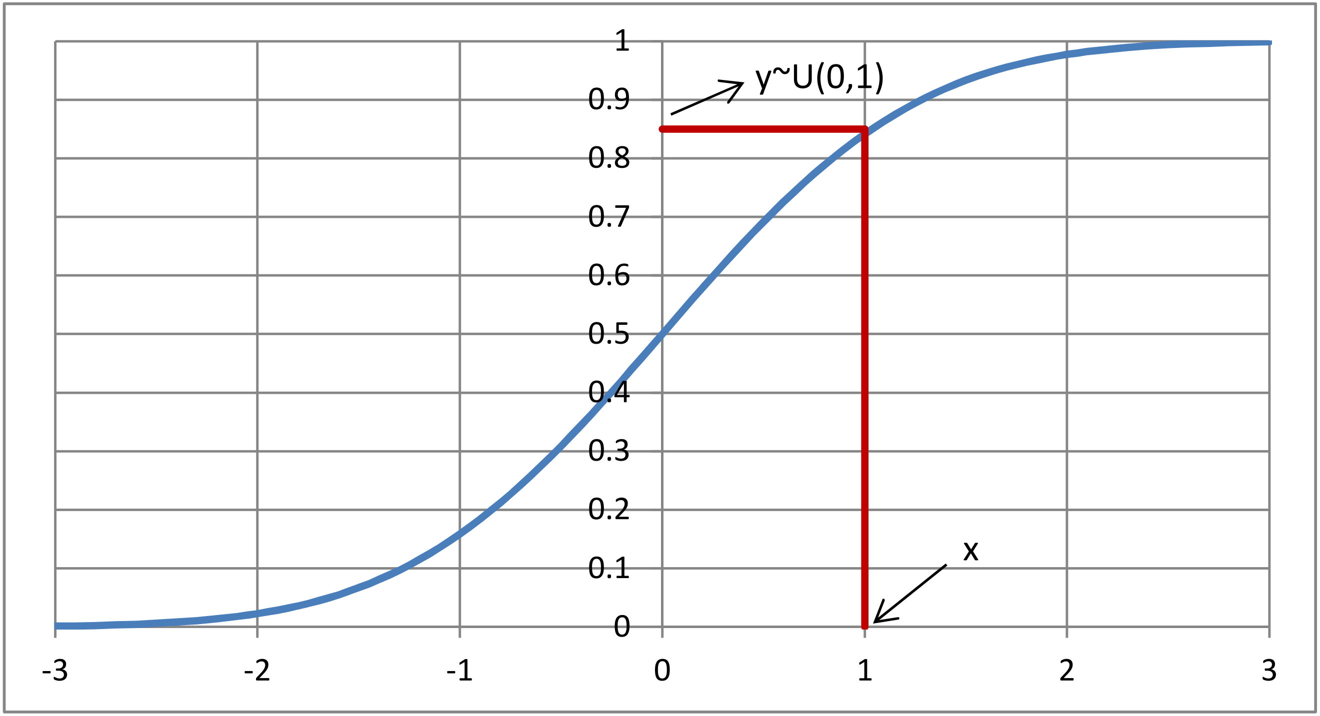


Figura 1: Transformação Inversa

Exemplo

Considerando $X \sim U(a,b)$, *temos que* $F_X(x) = (x-a)/(b-a)$. *Resolvendo* $y = (x-a)/(b-a)$ *obtemos* $x = (b-a)y + a$. *Basta agora gerar* $Y \sim U(0,1)$ *e fazer a transformação.*

Exemplo

Considerando $X \sim Exp(\lambda)$, *temos que* $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. *Resolvendo* $y = 1 - e^{-\lambda x}$ *obtemos* $x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$. *Basta agora gerar* $Y \sim U(0,1)$ *e fazer a transformação. Podemos notar que* $x \in (0, \infty)$.

Exemplo

Considerando X *com* $f(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$ *temos que* $F(x) = x^2$. *Resolvendo* $y = x^2$ *para* $x \in (0,1)$, *obtemos* $x = \sqrt{y}$.

Exemplo

Considerando X *com* $f(x) = \frac{x^2}{9}I_{(0,3)}(x)$ *temos que* $F(x) = x^3/27$. *Resolvendo* $y = x^3/27$ *para* $x \in (0,3)$, *obtemos* $x = 3y^{1/3}$.

Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

Teorema

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua e suponhamos que X e Y sejam independentes. [Portanto, a fdp de (X, Y) pode ser escrita como $f(x, y) = g(x)h(y)$]. Seja $Z = \frac{X}{Y}$. Deste modo, a fdp de Z, digamos q, será dada por

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v)|v|dv$$

Demonstração:

Sejam $z = x/y$ e $v = y$. Portanto, $x = vz$ e $y = v$. O jacobiano é

$$J = \begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

Daí a fdp conjunta de $Z = X/Y$ e $V = Y$ ser igual a

$$t(z, v) = g(vz)h(v)|v|$$

Integrando esta fdp conjunta em relação a v obtém-se a fdp marginal de Z procurada.

Exemplo

Admita-se que X e Y representem a duração da vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes. Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com fdp's f e g dadas a seguir. Obter a fdp de X/Y.

$$f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x) \quad e \quad g(y) = 2e^{-2y} I_{(0,\infty)}(y)$$

Temos que $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(2)$, com $X \perp\!\!\!\perp Y$, e $Z = X/Y \geq 0$.

$$q(z) = \int_0^\infty e^{-vz}\ 2e^{-2v}\, v\, dv = 2\int_0^\infty ve^{-v(2+z)}\ dv$$

Integrando por partes, obtemos:

$$q(z) = \frac{2}{(z+2)^2}\ , \qquad z \geq 0.$$

```
# QUOCIENTE DE DUAS EXPONENCIAIS
n=10^6
X=rexp(n, rate=1)
Y=rexp(n, rate=2)
Z=X/Y; hist(Z) # Vai prozudir valores muito elevados
quantile(Z,probs=seq(0,1,.1)) # avaliando os decis da distribuicão
nt=round(n*.95); # Vou abandonar os 5% maiores
Z=sort(Z); # Ordenando o vetor
Z=Z[1:nt]; # mantendo os 95% menores
zt=trunc(max(Z)) # Valor máximo truncado
z=seq(0,zt,1); z
H=hist(Z,plot=F); H
plot(H$mids,H$density)
fn=2/(2+z)^2
lines(z,fn)
```

Distribuição do Mínimo e do Máximo

Observação

Em algumas situações práticas temos interesse em estudar um sistema formado por vários componentes, em série ou paralelo. Se estiverem em série, o sistema falhará quando o primeiro falhar (mínimo), mas se estiver em paralelo, falhará quando o último falhar (máximo). Estas distribuições são muitas vezes denominadas de Estatísticas de Ordem.

Resultado

Sejam X e Y v.a's independentes, com f.d.p's dadas, respectivamente, por $f_1(x)$ e $f_2(y)$, e FD dadas por F_1 e F_2. A distribuição de $M = \max(X, Y)$, digamos $g(m)$, será dada por:

$$g(m) = f_1(m)F_2(m) + f_2(m)F_1(m)$$

Devemos inicialmente observar que se o máximo entre um conjunto de números é menor que m, então todos os números serão menores que m. Estes argumentos levam ao uso da Função de Distribuição, e posteriormente a função de probabilidade ou densidade.

Demonstração

$$
\begin{aligned}
G(m) &= P(M \leq m) = P(Max(X,Y) \leq m) = P(X \leq m \;\; Y \leq m) \\
&= P(X \leq m)P(Y \leq m) = F_1(m)F_2(m)
\end{aligned}
$$

Logo a f.d.p de M será obtida derivando-se $G(m)$ com relação a m:

$$
g(m) = \frac{\partial G(m)}{\partial m} = F_1^{'}(m)F_2(m) + F_1(m)F_2^{'}(m) = f_1(m)F_2(m) + f_2(m)F_1(m)
$$

$$
\therefore \boxed{g(m) = f_1(m)F_2(m) + f_2(m)F_1(m)}
$$

Observação

Se X e Y, além de independentes tiverama amesma distribuição de probabilidade, a f.d.p de M tornam-se:

$$
g(m) = 2f(m)F(m),
$$

onde $f(m) = f_1(m) = f_2(m)$ e $F(m) = F_1(m) = F_2(m)$.

Resultado

Sejam X e Y v.a's independentes, com f.d.p's dadas, respectivamente, por $f_1(x)$ e $f_2(y)$, e F.D. dadas por F_1 e F_2. A distribuição de $M = \min(X, Y)$, digamos $h(z)$, será dada por:

$$g(m) = f_1(z)[1 - F_2(z)] + f_2(z)[1 - F_1(z)]$$

Devemos inicialmente observar que se o mínimo entre um conjunto de números é maior que z, então todos os números serão maiores que z. Com base nisso, a F.D. de Z será:

$$\begin{aligned} H(z) &= P(Z \leq z) = P(Min(X,Y) \leq z) = 1 - P(Min(X,Y) > z) \\ &= 1 - P(X > z \;\; Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - [1 - F_1(z)][1 - F_2(z)] \\ &= 1 - [1 - F_2(z) - F_1(z) + F_1(z)F_2(z)] = F_1(z) + F_2(z) - F_1(z)F_2(z). \end{aligned}$$

Derivando, obtemos a densidade,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{\partial H(z)}{\partial z} = F_1^{'}(z) + F_2^{'}(z) - [F_1^{'}(z)F_2(z) + F_1(z)F_2^{'}(z)] \\ &= f_1(z) + f_2(z) - f_1(z)F_2(z) - F_1(z)f_2(z) \\ &= f_1(z)[1 - F_2(z)] + f_2(z)[1 - F_1(z)] \end{aligned}$$

Observação

Se X e Y tiverem a mesma distribuição de probabilidade, então:
$h(z) = 2f(z)[1 - F(z)]$, *onde* $f(z) = f_1(z) = f_2(z)$ *e* $F(z) = F_1(z) = F_2(z)$.

Distribuições condicionais

Observação

Em certas situações desejamos obter a distribuição de uma função de variáveis, dada uma determinada condição, ou no condicionamento pode estar uma função. Vejamos alguns casos:

- Dado que um evento ocorreu em determinado tempo t, qual a distribuição do tempo de ocorrência?
- Dado que 50 pessoas entraram em um supermercado, qual a probabilidade de terem sido 10 homens e 40 mulheres?

Distribuições condicionais: caso Binomial

Exemplo

Sejam $X \sim Bin(n,p)$ e $Y \sim Bin(n,p)$, independentes. Então a distribuição de X, dado que $X+Y=m$ é Hipergeométrica, com

$$P(X=k|X+Y=m)=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}.$$

Já vimos que $X+Y \sim Bin(2n,p)$. Portanto, para $0 \leq k \leq min(n,n)=n$,

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=m) &= \frac{P(X=k, X+Y=m)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k, Y=m-k)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{P(X=k)P(Y=m-k)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{m-k} \times \binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-(m-k)}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}} \\
&= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-n}}{\binom{2n}{m}}.
\end{aligned}$$

Distribuições condicionais: caso Poisson

Exemplo

Sejam $X \sim Poisson(\lambda_1)$ *e* $Y \sim Poisson(\lambda_2)$*, independentes. Então a distribuição de* X*, dado que* $X + Y = n$ *é* $Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

Já vimos que $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
P(X = k | X + Y = n) &= \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\
&= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k/k! \times e^{-\lambda_2}\lambda_1^{n-k}/(n-k)!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n/n!} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Exercício

Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ *e* $Y|(X = x) \sim Bin(x, p)$*. Então,*
a) A distribuição de Y *é* $Poisson(\lambda p)$.
b) A distribuição condicional de $X|(Y = y)$ *é* $Poisson(\lambda(1 - p))$.

Variáveis Aleatórias n-dimensionais

Observação

Praticamente todos os conceitos introduzidos para o caso bidimensional podem ser facilmente estendidos para o caso em que temos várias variáveis em estudo, por isso faremos um breve resumo sobre este caso. Consideremos a variável n-dimensional $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

Definição

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *uma variável aleatória n-dimensional contínua tomando todos os valores em alguma região* $\mathbb{R}^n$ *do espaço auclidiano. Uma função* f *que satisfaça as seguintes condições:*

i) $f(x_1, \cdots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

ii) $\displaystyle\int \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$

é denominada ***Função Densidade de Probabilidade Conjunta*** *de* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

Definição

Sendo $C \in \mathbb{R}^n$, a probabilidade associada a C é dada por

$$P(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in C) = \int_C \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Resultado

As distribuições marginais ou de um subconjunto das variáveis em $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ podem ser obtidas integrando-se com relação às demais. Por exemplo, para dimensão $n = 3$, a marginal de X_1 e a conjunta de X_2 e X_3 são dadas por

$$f_1(x_1) = \int \int f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

$$f_{23}(x_2, x_3) = \int f(x_1, x_2, x_3) dx_1$$

Método do jacobiano para o caso n-dimensional

Teorema

Suponha que $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *seja uma variável aleatória contínua* n*-dimensional com f.d.p conjunta* f*. Sejam* $Z_i = H_i(\boldsymbol{X})$*, e admitamos que as funções* H_i *satisfaçam às seguintes condições:*

a) *As equações* $z = H_i(\boldsymbol{x})$ *podem ser univocamente resolvidas para* $\boldsymbol{x}$ *em termos de* z*, isto é,* $x_i = G_i(\boldsymbol{z})$

b) *As derivadas parciais* $\partial x_i / \partial z_i$*, existem e são contínuas.*

Nessas circunstâncias, a f.d.p conjunta de $\boldsymbol{Z}$*, isto é,* $k(\boldsymbol{z})$ *é dada pela seguinte expressão:* $k(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}) \ |J(\boldsymbol{z})|$ *, onde* $J(.)$ *é o determinante* $n \times n$ *:*

$$J(\boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Esperança Condicional

Em muitas situações estamos interessados em determinadas características (distribuição, média etc.) de uma variável, sujeita a determinada condição. Neste caso passamos a trabalhar com distribuições condicionais, fixada uma outra variável.

Definição

a) *Se (X, Y) for uma variável aleatória* ***contínua*** *bidimensional, definiremos o valor esperado condicional de X, dado $Y = y$, como*

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y)dx, \qquad E(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y|x)dy$$

b) *Se (X, Y) for uma v.a* ***discreta*** *bidimensional, definiremos o valor esperado condicional de X, dado $Y = y_j$, como*

$$E(X|y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i|y_j), \qquad E(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p(y_j|x_i)$$

Observação:

1. $E(X|Y)$ é uma função de Y, logo é uma v.a. $E(X|Y) = H_1(Y)$
2. $E(Y|X)$ é uma função de X, logo é uma v.a. $E(Y|X) = H_2(X)$
3. Como $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$ são v.a's, terá sentido falarmos em seu valor esperado.

Esperança de $H_1(Y)$ e $H_2(X)$

Teorema

Seja (X, Y) for uma variável aleatória uma variável aleatória qualquer. Temos que

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

$$E(E(Y|X)) = E(Y)$$

Demostração: **(p/ caso contínuo)**

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f(x,y)}{h(y)}dx = \frac{1}{h(y)}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
E[E(X|Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|y)h(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{h(y)}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dx\right] h(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dydx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = E(X)
\end{aligned}$$

Variância Condicional

Teorema

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$$

$$Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$$

Exemplo

Adimita que um inseto ponha ovos segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro 4 e que a probabilidade de que um ovo dê origem a um novo inseto seja 0,6. Admitimos que os ovos produzam novos insetos de maneira independente, encontre o número esperado de novos insetos.

X = n^o de ovos produzidos pelo inseto: $X \sim P(4)$. Logo: $E(X) = Var(X) = 4$
Y = n^o de novos insetos gerados: $E(Y) =?$

$$Y|(X = x) \sim Bin(x; 0,6) \quad \Rightarrow \quad E(Y|x) = 0,6x \quad \Rightarrow \quad E(Y|X) = 0,6X$$

$$\Longrightarrow E(Y) = E(E(Y|X)) = E(0,6X) = 0,6 \times E(X) = 0,6 \times 4 = 2,4.$$

$$\Longrightarrow Var(Y) = E(0,24X) + Var(0,6X) = 0,96 + 1,44 = 2,4.$$

CÓDIGO R

```
# ESPERANÇA E VARIANCIA CONDICIONAIS
n=10^6
X=rpois(n,4)
Y.X=rep(0,n)
for (i in 1:n) Y.X[i]=rbinom(1,X[i],.6)
mean(Y.X)
var(Y.X)
```

Exemplo

Suponha-se que a variável aleatória bidimensional (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre a região triangular a seguir. Obter $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$

$$T = \{(x, y)|0 < x < y < 1\}.$$

Temos que

$$f(x, y) = 2I_T(x, y)$$

Coeficientes de Covariância e Correlação

Observação

A principal medida de o quanto duas variáveis estão relacionadas é o coeficiente de covariância. No entanto, sua ordem de grandeza depende da unidade de medida das variáveis. Para contornar este problema, costuma-se adotar o coeficiente de correlação que é a normalização da covariância, restringindo-se ao intervalo [-1,1].

Definição

Seja (X,Y) *uma v.a. bidimensional com médias* μ_X *e* μ_Y, *respectivamente. Definiremos o* ***Coeficiente de Covariância*** $Cov(X,Y)$ *entre* X *e* Y *(às vezes representado por* σ_{XY}*) por*

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) = E(XY) - E(X)E(Y)\right]$$

Demostração:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(X) - E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

- Temos que $Cov(X, X) = Var(X)$
- E que $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.

Definição

*Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com médias μ_X e μ_Y e desvios-padrão σ_X e σ_Y, respectivamente. Definiremos o **Coeficiente de Correlação (Linear)** entre X e Y, por*

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

1. Se X e Y forem independentes, então $\rho_{XY} = 0$.
2. A recíproca não é verdadeira, i.é., $\rho_{XY} = 0$ não implica em independência.
3. $\rho_{XY} = 0$ significa que X e Y são não correlacionadas, linearmente.
4. Quando não houver confusão, podemos representá-lo apenas por ρ.

Distribuição Multinomial

Definição

Suponha que existam k resultados possíveis para um experimento: $A_1, A_2, \ldots, A_k$. *Seja* $p_i = P(A_i)$, $i = 1, \cdots, k$. *Assim, devemos ter* $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. *Suponha que repetimos o experimentos n vezes independentemente. Seja* X_i *o* n^o *de vezes que ocorre o resultado* A_i, $i = 1, 2, \cdots, k$. *Então, a f.p. conjunta das v.a's* $X_1, \cdots, X_k$ *é dada por:*

$$P(X_1 = x_1,\ \ X_2 = x_2, \cdots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

com $x_i = 0, 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

Observação

- *Cada v.a.* X_i *tem distribuição binomial, ou seja,* $X_i \sim Binomial(n, p_i)$
- $E(X_i) = np_i \quad e \quad Var(X_i) = np_i(1 - p_i), \quad i = 1, \ldots, k.$
- $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$ *e* $\rho_{ij} = -\sqrt{\dfrac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}}$
- *As* X_i*'s não são independentes.*

Propriedades

Resultado

Se $X \perp\!\!\!\perp Y$ então:

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $E(h_1(X)h_2(Y)) = E(h_1(X))E(h_2(Y))$.
  Exemplo, $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$
- $Var(XY) = Var(X)Var(Y) + \sigma_X^2\mu_Y + \sigma_Y^2\mu_X + \mu_X^2\mu_Y^2 - \mu_X\mu_Y$

- Se $\mu_X = \mu_Y = 0$ teremos que $Var(XY) = Var(X)V(Y)$
- Se $\mu_X \neq 0$ e/ou $\mu_Y \neq 0$ teremos $Var(XY) \neq Var(X)Var(Y)$

Propriedades

```
# PROPRIDADES: ESPERANÇA E VARIANCIA
n=10^6
X=rnorm(n,mean=0, sd=1); mean(X); sd(X)
Y=rnorm(n,mean=0, sd=2); mean(Y); sd(Y)
Z=X*Y
mean(Z); sd(Z)

X=rnorm(n,mean=1, sd=1); mean(X); sd(X)
Y=rnorm(n,mean=2, sd=2); mean(Y); sd(Y)
Z=X*Y
mean(Z); sd(Z)


X=rnorm(n,mean=0, sd=1); mean(X); sd(X)
Y=rnorm(n,mean=1, sd=2); mean(Y); sd(Y)
Z=X*Y
mean(Z); sd(Z)
```

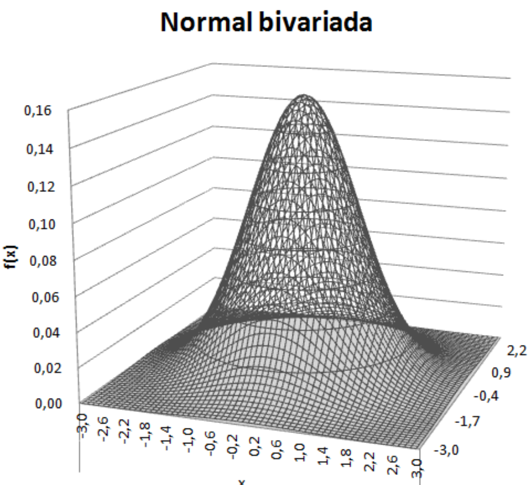
Distribuição Normal Bidimensional

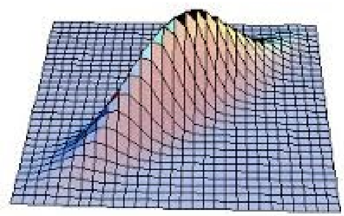
Definição

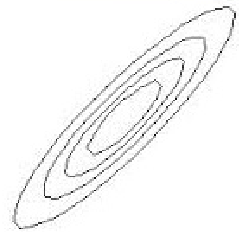
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua, bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Diremos que (X,Y) tem uma distribuição normal bidimensional se sua fdp conjunta for dada pela seguinte espressão

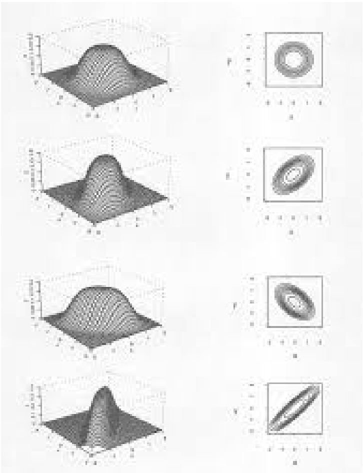
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

$$-\infty<x<\infty \quad , \quad -\infty<y<\infty$$









Teorema

Suponha-se que (X, Y) tenha fdp como a dada pela equação acima. Então, nesse caso:

a) *As distribuições marginais de X e Y são $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, respectivamente.*

b) *O parâmetro ρ é o coeficiente de correlação entre X e Y.*

c) *As distribuições condicionais de X (dado que $Y = y$) e de Y (dado que $X = x$) serão, respectivamente:*

$$N\left[\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) \quad , \quad \sigma_X^2(1-\rho^2)\right],$$

$$N\left[\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_Y) \quad , \quad \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right]$$

Observação

1. *A recíproca de a) no Teorema não vale.*
2. *Se $\rho = 0$, então X e Y são independentes. Isto só vale na distribuição Normal bidimensional.*

Distribuição Normal n-dimensional

Definição

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma variável aleatória contínua, n-dimensional, tomando todos os valores no espaço euclidiano. Diremos que $\boldsymbol{X}$ tem uma distribuição normal n-dimensional ou multivariada se sua fdp conjunta for dada pela seguinte espressão

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \quad \boldsymbol{x} \in I\!R^n,$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ é o vetor das médias das X_i, $i = 1, \cdots, n$.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

onde $\sigma_i^2 = Var(X_i)$ e σ_{ij} é a $Cov(X_i, X_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Ainda, $|\boldsymbol{\Sigma}|$ representa o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ é a inversa de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Teorema

Suponha-se que $\boldsymbol{X}$ *tenha fdp como a dada pela equação acima. Então,*

a) *A distribuição marginal de* X_i, $i = 1, \cdots, n$, *é* $N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

b) *O parâmetro* ρ_{ij} *é o coeficiente de correlação entre* X_i *e* X_j.

Exercícios

Exercício

Uma variável aleatória X segue uma distribuição uniforme no intervalo [0,1]. A distribuição condicional $Y|(X = x)$ segue uma distribuição binomial com parâmetros $n = 6$ e $p = x$. Obtenha o valor esperado e a variância de Y.

Exercício

Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes, todas com média 500 e variância 100. Obtenha o valor esperado e a variância de $Z = (X_1 - 2X_2 + X_3)/4$.

Exercício

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, correspondendo às medições realizadas por dois diferentes operadores. Essas variáveis aleatórias possuem a mesma média , mas as variâncias são diferentes, σ_X^2 e σ_Y^2, respectivamente. Deseja-se calcular uma média ponderada dessas duas medições, ou seja, $Z = kX + (1-k)Y$. Qual o valor de $k \in (0,1)$ que torna mínima a variância de Z?

Exercício

Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = 2X + Y$.

Exercícios

Exercício

Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_1 e α_2, respectivamente.
a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2$.
b) Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

Exercício

Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua f.d.p conjunta seja dada pela função abaixo. Verifique se Xe Y são independentes.

$$f(x, y) = \frac{1}{2}e^{-(2x+y)} \quad ; \; x \geq 0, \; y \geq 0.$$

Exercícios

Exercício

Determine a distribuição da Variável $Z = min(X, Y)$ quando X e Y são v.a. independentes, ambas com distribuição Geométrica de parâmetro p.

Exercício

Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha f.d.p conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-(2x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) *Calcule* $P(0 < X < 2, \quad 0 < Y < 3)$

b) *Desenhe a região* $B = \{X > 2Y\} = \{(x,y) : x > 2y\}$

c) *Calcule* $P(X > 2Y)$