Universidade Federal do Pará (UFPA)
Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN)

Professor: Héliton Ribeiro Tavares

*********************************** **Atenção:** **

i) Selecione 5 questões fazendo um círculo nos números abaixo. Cada questão vale 2 pontos

1 2 3 4 5 6 7 8

ii) Descreva detalhadamente cada passo do desenvolvimento

iii) A prova é estritamente individual e sem consulta.

****

1) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 2$.

Y/X	0	1	2	Total
0	0,714	0,133	0,004	0,851
1	0,133	0,012	0	0,145
2	0,004	0	0	0,004
Total	0,851	0,145	0,004	1,00

..../PROB/CP03010A.tex

2) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 0$.

c) Verifique se X e Y são independentes.

Y/X	0	1	2
0	0,714	0,133	0,004
1	0,133	0,012	0
2	0,004	0	0

..../PROB/CP03010B.tex

3) Retiram-se duas cartas de um baralho. Sejam $X = n^o$ de azes obtidos e $Y = n^o$ de damas obtidas. A distribuição conjunta é dada pela tabela abaixo. Obtenha,

a) Distribuição Marginal de X e de Y.

b) Distribuição Condicional de X, dado $Y = 0$.

Y/X	0	1	2
0	0,714	0,133	0,004
1	0,133	0,012	0
2	0,004	0	0

..../PROB/CP03010C.tex

4) Seja X uma v.a. com distribuição $U(0,1)$. Mostre que:

a) $Y = (b-a)X + a$ tem distribuição $U(a,b)$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ tem distribuição $Exp(\lambda)$

..../PROB/CP05001A.TEX

5) Seja X uma v.a. com distribuição $U(0,1)$. Mostre, usando o **Método do Jacobiano**, que:

a) $Y = (b-a)X + a$ tem distribuição $U(a,b)$.

b) $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ tem distribuição $Exp(\lambda)$

..../PROB/CP05001B.tex

6) Suponha que a velocidade V de um objeto tenha distribuição $N(0,1)$. Seja $K = mV^2/2$ a eneergia cinética do objeto. Encontre a fdp de K.

..../PROB/CP050020A.TEX

7) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p)	b) Exponencial(λ)	c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Normal(μ, σ^2)	e) Poisson(λ)	f) Binomial Negativa (r, p).

..../PROB/CP05002E.TEX

8) Calcule a Esperança e a Variância da variável aleatória X nos seguintes casos:

(a) $X \sim Poisson(\lambda)$; (b) Normal (μ, σ^2).

..../PROB/CP05003B.TEX

9) Considerando a distribuição $N(0,1)$:

a) Qual o valor máximo que a função de densidade assume?

b) Ele é de fato uma função de densidade? [dica: verifique que $f(x) \geq 0, \forall x$ e que sua integral é 1.]

..../PROB/CP05005A.TEX

10) Seja X uma v.a. qualquer com média μ_X e variância σ_X^2, e $Y = aX + b$, onde a e b são duas constantes quaisquer. Mostre que a Esperança e a Variância de Y podem ser obtidas por

a) $E(Y) = a\mu_X + b$

b) $Var(Y) = a^2\sigma_X^2$.

..../PROB/CP05010A.TEX

11) Suponha que a duração de um certo tipo de lâmpada depois de instalada distribui-se, exponencialmente, com duração média de 20 dias. Quando uma lâmpada queima, instala-se outra do mesmo tipo em seu lugar. Obtenha a probabilidade de que sejam necessárias mais de 40 lâmpadas durante o período de um ano.

..../PROB/CP05015B.TEX

12) Suponha que a velocidade V de um objeto tenha dsitribuição $N(0,1)$. Seja $K = mV^2/2$ a energia cinética do objeto. Encontre a fdp de K.

..../PROB/CP05020A.tex

13) Considere que você tem um conjunto de observações $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de uma v.a. X com média μ e variância σ^2.

a) O que você pode pode afirmar sobre a distribuição amostral da média $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

b) Agora considere que X tem distribuição $Bernoulli(p)$. O que se pode afirmar sobre a distribuição amostral da proporção $\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$?

..../PROB/CP05025A.TEX

14) Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $P(0 < X < 1, \quad 1 < Y < 2)$

b) Desenhe a região $B = \{X > Y\} = \{(x,y) : x > y\}$

c) Calcule $P(X > Y)$

..../PROB/cp05030.tex

15) Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Verifique que integra 1

b) Desenhe a região $B = \{X + Y \geq 1\}$

c) Calcule $P(X + Y \geq 1)$

..../PROB/cp05031.tex

16) Dois característicos do desenpenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória com f.d.p conjunta dada por:

$$f(x, y) = 2(x + y - 2xy), \quad 0 \leq x \leq 1 \;\; 0 \leq y \leq 1$$

Encontrar as f.d.p's marginais de X e Y.

..../PROB/cp05032.tex

17) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

..../PROB/cp05033.tex

18) Admita que um inseto ponha ovos segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro 5 e que a probabilidade de que um ovo dê origem a um novo inseto seja 0,7. Admitimos que os ovos produzam novos insetos de maneira independente, encontre o número esperado de novos insetos gerados pelo inseto.

..../PROB/CP060010A.TEX

19) Sejam $X \sim U(0, 1)$ e $Y \sim U(0, 1)$ independentes. Mostre que $Z = \sqrt{-2\ln(X)}\cos(2\pi Y)$ e $W = \sqrt{-2\ln(X)}\texttt{sen}(2\pi Y)$ são $N(0, 1)$ independentes.

..../PROB/CP06011A.TEX

20) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$ independentes. Mostre que $Z = X + Y$ e $W = X - Y$ são $N(0, 2)$ independentes (**Método do Jacobiano**).

..../PROB/CP06012A.TEX

21) Sejam X_1, X_2 e X_3 v.a. independentes com distribuição $N(0, 1)$ e $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $Y_2 = X_1 - X_2$ e $Y_3 = X_1 - X_3$. Obter a densidade conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3) via Método do Jacobiano.

..../PROB/CP06013A.tex

22) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a's independentes. Suponha que $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que a v.a $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

..../PROB/CP06014A.tex

23) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_1 e α_2, respectivamente.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2$.

b) Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

..../PROB/CP06015A.tex

24) Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_i, $i = 1, \cdots, n$.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

b) Calcule $P(X_1 < X_2)$.

..../PROB/CP06015B.tex

25) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o máximo dos dois resultados e Y a soma dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{(X, Y)}$.

..../PROB/CP06016.tex

26) Lançam-se dois dados perfeitos. X indica o máximo dos dois resultados e Y a diferença dos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{(X, Y)}$.

..../PROB/CP06016b.tex

27) Suponha que a variável aleatória (X, Y) tenha $f.d.p$ conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-(2x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $P(0 < X < 2, \quad 0 < Y < 3)$

b) Desenhe a região $B = \{X > 2Y\} = \{(x,y) : x > 2y\}$

c) Calcule $P(X > 2Y)$

..../PROB/CP06017.tex

28) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais e condicionais.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

..../PROB/CP06018.tex

29) Considerando a densidade conjunta abaixo, obter as densidades marginais de X e Y, e condicionais de $X|(Y = y)$ e $Y|(X = x)$.

$$f(x,y) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq x.$$

..../PROB/CP06019.tex

30) Considere a fdp a seguir:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x > 0, y > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Obtenha a Função de Distribuição Conjunta de (X, Y)

b) Derive-a de forma a obter a densidade novamente.

..../PROB/CP06020.tex

31) Sejam X e Y v.a's independentes, cada uma tendo distribuição Uniforme no intervalo $(0, 1)$. Seja $Z = X + Y$. Encontre a f.d.p de Z pelo Método do Jacobiano.

..../PROB/CP07001A.tex

32) Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua f.d.p conjunta seja dada pela função abaixo. Verifique se Xe Y são independentes.

$$f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-(2x+y)} \quad ; \ x \geq 0, \ \ y \geq 0.$$

..../PROB/cp07002.tex

33) A tabela a seguir dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y), referente ao número de peças produzidas por duas linhas de prodção.

Y\X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	$\boxed{0{,}01}$	$\boxed{0{,}03}$	$\boxed{0{,}05}$	$\boxed{0{,}07}$	$\boxed{0{,}09}$	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1,00

Encontre a distribuição de probabilidade das seguintes v.a's:

$U =$ mín $(X, Y) =$ menor nº de peças produzidas pelas duas linhas.

$V =$ máx$(X, Y) =$ maior nº de peças produziadas pelas duas linhas.

$W = X + Y =$ nº total de peças produzidas pelas duas linhas.

..../PROB/cp07003.tex

34) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Bin(n_1, p) e Bin(n_2, p), respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

..../PROB/cp07004.tex

35) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente. Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

..../PROB/cp07005.tex

36) Sejam $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 1)$, independentes, qual a distribuição de $Z = X + Y$?

..../PROB/cp07006.tex

37) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente.

   a) Determinar a distribuição de $Z = X + Y$.

   b) Determinar a distribuição condicional de X dado que $Z = n$.

..../PROB/cp07007.tex

38) Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y|(X = x) \sim Bin(x, p)$. Mostre que,

a) A distribuição de Y é $Poisson(\lambda p)$.

b) A distribuição condicional de $X|(Y = y)$ é $\mathcal{P}oisson(\lambda(1 - p))$.

..../PROB/CP07008.tex

39) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Poisson(λ_1) e Poisson(λ_2), respectivamente.

a) Mostrar que a distribuição de $Z = X + Y$ é Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b) Mostrar que a distribuição de X, dado que $X + Y = n$ é $Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$.

..../PROB/CP08001A.tex

40) Sejam X e Y v.a.i. com distribuições Bin(n_1, p) e Bin(n_2, p), respectivamente.

a) Mostrar que a distribuição de $Z = X + Y$ é Bin$(n_1 + n_2, p)$.

b) Mostrar que a distribuição de X, dado que $X + Y = m$ é Hipergeométrica. Ou seja,

$$P(X = k|X + Y = m) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-n}}{\binom{2n}{m}}.$$

..../PROB/CP08002A.tex

41) Demonstre que se ρ_{XY} é o coeficiente de correlação entre X e Y, então $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

..../PROB/CP09001A.tex

42) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p)

b) Poisson(λ)

c) Geométrica(p)

d) Exponencial(λ)

e) Normal(μ, σ^2)

..../PROB/CP1.tex

43) Uma Empresa produz barras de comprimento especificado, mas com certa aleatoriedade no comprimento. Admita-se que o comprimento real X (polegada) seja uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre [9,12]. Suponha-se que somente interesse saber se um dos três eventos (tipos) seguinte terá ocorrido: $A_1 = \{X < 9,5\}$, $A_2 = \{9,5 \leq X \leq 11,5\}$ *e* $A_3 = \{X > 11,5\}$. Determine a probabilidade de que entre 10 barras produzidas tenhamos duas do Tipo 1, duas do Tipo 3 e as demais do Tipo 2.

..../PROB/CP10001A.tex

44) Sejam $X \sim N(0,9)$ e $Y = \chi^2_{25}$ v.a's independentes. Usando apenas a definição[1] da variável t, encontre k tal que a distribuição da v.a $U = k\frac{X}{\sqrt{Y}}$ seja t-Student com 25 graus de liberdade.

[1] Teorema 30, página 171

..../PROB/CP10002A.tex

45) Sejam $X_k \sim \chi^2_k$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Obtenha a distribuição da v.a $W = \frac{X_2+X_3+X_4}{9X_1}$

b) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

..../PROB/CP10003A.tex

46) Sejam $X_k \sim \chi^2_{2k}$, k=1,2,3,4 v.a's independentes.

a) Encontre k tal que a distribuição da v.a. $W = k\left(\frac{X_2+X_3+X_4}{X_1}\right)$ seja F-Snedecor, e informe o grau de liberdade.

b) Encontre w tal que $P[W \leq w] = 0,975$

..../PROB/CP10003B.tex

47) Para os casos abaixo, informe (não precisar fazer as contas) qual a FGM:

(i) Binomial (n,p) (ii) Geométrica(p) (iii) Poisson(λ)
(iv) Uniforme(a,b) (v) Exponencial(λ) (vi) Normal(μ,σ^2).

..../PROB/CP101.tex

48) Calcule a Função Geradra de Momentos (FGM) da v.a. X quando a distribuição de X é (i) Poisson(λ) e (ii) Normal(μ,σ^2). Use-as para obter a média e a variância nos dois casos.

..../PROB/CP102.tex

49) Prove os seguintes resultados:

(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t}M_X(\alpha t)$

(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

..../PROB/cp103.tex

50) Prove os seguintes resultados:

(1) Suponha que a v.a. X tenha fgm M_X. Seja $Y = \alpha X + \beta$. Então, a fgm de Y será dada por $M_Y(t) = e^{\beta t}M_X(\alpha t)$

(2) Suponha que X e Y sejam v.a. Independentes, com fgm dadas por M_X e M_Y, respectivamente. Se $Z = X + Y$, mostre que $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(3) Generalize para uma soma qualquer: sejam X_i v.a. independentes com fgm dadas por $M_i, i = 1,\cdots,n$. Então se $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, teremos que $M_Z(t) = M_1(t) \times \ldots \times M_n(t) = \prod_{i=1}^n M_i(t)$. Se, adicionalmente, as X_i são identicamente distribuídas, teremos que $M_Z(t) = [M_1(t)]^n$.

..../PROB/cp103B.tex

51) Prove os seguintes resultados:

..../PROB/cp104.tex

52) No PSS da UFPA a nota em cada disciplina X_i tinha média 500 e desvio-padrão 100. Na Fase 1 tínhamos $n = 11$ disciplinas. Supondo que a correlação entre cada par de disciplinas é 0,5, obtenha a média e o desvio-padrão da Nota Padronhizada da Fase 1 (NP1), dada por $NP1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

..../PROB/CP105.tex

53) Qual o valor máximo da função de probabilidade/densidade nos seguintes casos:

a) Binomial(n,p) b) N(0,1)

..../PROB/CP106.tex

54) Consideremos que o fato de chover ou não amanhã dependa de se choveu ou não nos últimos três dias (hoje, ontem e anteontem).

(a) Este sistema pode ser

..../PROB/CP11.TEX

55) Suponha que a duração da vida de uma peça seja exponencialmente distribuída, com média 3. Suponha que 10 dessas peças sejam instaladas sucessivamente, de modo que a i-ésima peça seja instalada imediatamente depois que a ordem $(i-1)$ tenha falhado. Seja T_i a duração até falhar da i-ésima peça, $i = 1, 2, \ldots, 10$, sempre medida a partir do instante de instalação. Portanto, $S_{10} = T_1 + \ldots + T_{10}$ representa o tempo total de funcionamento das 10 peças. Admitindo que os T_i sejam independentes, calcule $P(S_{10} \geq 20)$.

..../PROB/cp11001A.tex

56) Suponha que X e Y são duas v.a.'s tais que $\rho_{XY} = 1/2$, $Var(X) = 1$ e $Var(Y) = 2$. Obtenha $Var(X - 2Y)$.

..../PROB/CP113.TEX

57) Suponha que X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ sejam observações (v.a's) independentes, cada uma delas tendo distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,05$. Faça $S = X_1 + \cdots + X_n$. Use $n = 30$.

a) Empregando o Teorema Central do Limite, calcule $P(S \geq 4)$.

b) Compare a resposta de (a) com o valor exato dessa probabilidade.

..../PROB/CP12001A.tex

58) Um sistema complexo é constituído de n componentes que funcionam independentemente. A probabilidade de que qualquer um dos componentes venha a falhar durante o período de operação é igual a r. A fim de que o sistema completo funcione, pelo menos 95 dos componentes devem funcionar perfeitamente. Usando $n = 100$ e $r = 0,15$, calcule a probabilidade de que isso aconteça.

..../PROB/CP12002A.tex

59) Suponha que o sistema do Exercício 58 seja constituído de n componentes cada um deles tendo uma confiabilidade de 0,85. O sistema funcionará se ao menos 80 por cento dos componentes funcionarem adequadamente. Determine n de maneira que o sistema tenha uma confiabilidade de 0,95.

..../PROB/CP12003A.tex

60) Seja $X \sim B(10; 0,4)$. Obter $P(X \geq 6)$ e $P(X < 4)$ utilizando a correção de continuidade.

..../PROB/CP12004A.tex

61) Suponha que a proporção de fumantes de uma população seja p, desconhecida. Queremos determinar p com um erro de, no máximo, $0,03$. Qual deve ser o tamanho da amostra n a ser escolhida com reposição, se $\gamma = 0,90$?

..../PROB/CP12005A.tex

62) Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e 2 pretas. Extrai-se uma amostra de duas bolas sem reposição. Sejam U e V os números de bolas vermelhas e pretas, respectivamente, na amostra. Determine:

a) ρ_{uv} b) $E(U|V = 1)$ c) $Var(U|V = 1)$

..../PROB/CP123.TEX

63) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes, cada uma tendo distribuição exponencial com parâmetros α_1 e α_2, respectivamente.

a) Mostre que a v.a. $M = min(X_1, X_2)$ tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha_1 + \alpha_2$.

b) Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

..../PROB/CP13.TEX

64) Suponha que uma caixa contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Seleciona-se, sem reposição, duas bolas da caixa. Seja X o número da primeira bola e Y o número da segunda bola. Determine:

a) $Cov(X, Y)$ b) ρ_{xy} c) $E(Y|X = 2)$ d) $Var(Y|X = 2)$

..../PROB/CP133.TEX

65) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$.

..../PROB/CP14.TEX

66) Suponha que $X \sim Poisson(\lambda)$. Use a desigualdade de Tchebycheff para verificar as seguintes desigualdades:

a) $P\left[X \leq \frac{\lambda}{2}\right] \leq \frac{4}{\lambda}$ b) $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

..../PROB/CP143.TEX

67) Suponha que a duração de um certo tipo de lâmpada depois de instalada distribui-se, exponencialmente, com duração média de 10 dias. Quando uma lâmpada queima, instala-se outra do mesmo tipo em seu lugar. Obtenha a probabilidade de que sejam necessárias mais de 50 lâmpadas durante o período de um ano.

..../PROB/CP15.TEX

68) Um fabricante de parafusos sabe que 5% de sua produção é defeituosa. Ele oferece uma garantia sobre sua remessa de 10.000 itens, prometendo reembolsar o dinheiro se mais de a parafusos forem defeituosos. Qual o menor valor que o fabricante pode atribuir a a e ainda continuar seguro de que não precisa reembolsar o dinheiro em mais de 1% das vezes?

..../PROB/CP153.TEX

69) Em um programa de TV o apresentador mostra-lhe três portas iguais. Por trás de uma delas está um maravilhoso e cintilante carro. Por trás de cada uma das outras está uma cabra. O objectivo do jogo é que o leitor escolha uma das portas, ganhando o prémio que ela esconde. O apresentador começa por lhe pedir que escolha uma das três portas. O apresentador (que sabe onde está o carro) abre uma das duas portas não escolhidas, revelando uma cabra. Em seguida, vira-se para si e dá-lhe a possibilidade de trocar a sua escolha da porta inicial para a outra porta ainda fechada. O que é que lhe é mais vantajoso ? Trocar de portas ou manter a escolha inicial ? Ou é indiferente ? Justifique sua resposta.

..../PROB/CP1a.tex

70) Sua mãe costuma jogar na Megasena, mas seus recursos só permitem jogar n bilhetes a cada ano. Ela lhe faz a seguinte pergunta: o que é melhor, jogar n cartões de uma única vez ou fazer uma aposta por vez até acabar os recursos?

..../PROB/CP1b.tex

71) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial
g) Exponencial(λ) h) Normal(μ, σ^2) $\chi(n)$, Gamma(α, β), $t - S$

..../PROB/CP1c.tex

72) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) i) Qui-Quadrado (n), j) $Gamma(\alpha, \beta)$, k) $t - Student$ (n),
l) $F - Snedecor(m, n)$.

..../PROB/CP1d.tex

73) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) [num. lanc.]
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Multinomial g) Exponencial(λ)
h) Normal(μ, σ^2) .

..../PROB/CP1e.tex

74) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade, com seus parâmetros.

a) Binomial b) Poisson c) Geométrica
d) Binomial Negativa e) Hipergeométrica f) Exponencial
g) Normal h) Bernoulli i) Uniforme.

..../PROB/CP1F.tex

75) Para cada uma das distribuições abaixo, informe: (i) se é discreta ou contínua, (ii) valores que ela assume, (iii) função de probabilidade (fp) ou função densidade de probabilidade e (iv) $E(X)$ e $Var(X)$.

a) Binomial (n,p) b) Poisson(λ) c) Geométrica(p) d) Uniforme(a, b)
e) Exponencial(λ) f) Normal(μ, σ^2) g) Qui-Quadrado (n) h) $Gamma(\alpha, \beta)$

..../PROB/CP1g.tex

76) Seja X uma variável aleatória contínua, com fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1, \\ a & 1 \leq x \leq 2, \\ -ax + 3a & 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

(i) Determine a constante a; (ii) esboce o gráfico da F (Função de Distribuição Acumulada).

..../PROB/CP2.TEX

77) Prove as Leis de Morgan:

$$(i)\ \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \quad (ii)\ \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

..../PROB/CP201.tex

78) Discuta três possíveis interpretações para o problema a seguir, apresentando suas soluções: *"Num círculo unitário, o triângulo equilátero inscrito tem lado igual a $\sqrt{3}$. Qual é a probabilidade de uma corda desse círculo, escolhida ao acaso, ter comprimento maior que o lado desse triângulo."*

..../PROB/CP202.tex

79) São escritas cartas a n destinatários diferentes e há n envelopes com os respectivos endereços. Porém, as cartas são colocadas ao acaso em cada um desses envelopes.

a) Qual é a probabilidade da k-ésima carta chegar ao destino correto?

b) Qual é a probabilidade de pelo menos uma carta chegar ao destino correto?

c) O que ocorre com a probabilidade em (b) se $n \to \infty$?

..../PROB/CP203.tex

80) Exames de diagnóstico não são infalíveis, mas deseja-se que tenham probabilidade pequena de erro. Um exame detecta uma certa doença, caso ela exista, com probabilidade 0,9; se a doença não existir, o exame acerta isso com probabilidade de 0,8. Considere que estamos aplicando o teste em uma população com 10% de incidência dessa doença. Para um indivíduo escolhido ao acaso, pergunta-se:

a) A probabilidade de ser realmente doente se o exame indicou que era.

b) Se dois indivíduos forem escolhidos e testados, qual seria a probabilidade de errar um dos diagnósticos?

c) Suponha que o acerto do exame, nas duas soluções possíveis, tem a mesma probabilidade p. Qual deveria ser o valor de p para que a probabilidade calculada no item (a) seja de 0,9?

..../PROB/CP204.tex

81) Um carcereiro informa a três prisioneiros que um deles foi sorteado para ser solto no dia seguinte, enquanto os outros dois serão executados. O prisioneiro João se aproxima do carcereiro e cochicha no seu ouvido, solicitando que qual dos outros dois prisioneiros será executado. O prisioneiro argumenta que isso não altera em nada sua situação, visto que pelo menos um desses prisioneiros será executado. Entretanto, o carcereiro não atende a seu pedido, acreditando que isso poderia dar a João alterações nas suas expetativas de ser libertado. Você acha que o carcereiro tem razão:

..../PROB/CP205.tex

82) Suponha que uma impressora de alta velocidade cometa erros segundo um modeo Poisson, com uma taxa de 3 erros por página.

a) Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?

b) Se 5 páginas são sorteadas ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de encontrarmos pelo menos uma página com pelo menos 1 erro por página?

c) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos 1 erro. Você identifica o modelo dessa variável?

..../PROB/CP221.tex

83) Suponha que uma impressora de alta velocidade cometa erros segundo um modeo Poisson, com uma taxa de 3 erros por página.

a) Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página escolhida ao acaso?

b) Se 5 páginas são sorteadas ao acaso e de forma independente, qual é a probabilidade de encontrarmos pelo menos uma página com pelo menos 1 erro por página?

c) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas com pelo menos 1 erro. Você identifica o modelo dessa variável?

d) Dentro das condições de (b), considere a variável que conta o número de páginas até encontrarmos a segunda página com erro. Você identifica o modelo dessa variável?

..../PROB/CP221B.tex

84) Supondo que a expectativa de vida, em anos, seja uma v.a. $Exp(1/70)$

a) Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade viver pelo menos até os 80 anos;

b) Refaça o item (a), sabendo que o indivíduo tem mais de 50 anos;

c) Calcule o valor de m tal que $P(X > m) = 1/2$.

..../PROB/CP222.tex

85) Suponha que o volume, em litros, de uma garrafa de refrigerantes seja Normal com parâmetros $\mu = 2$ e $\sigma^2 = 0,0025$. Se 3 garrafas forem escolhidas ao acaso, pergunta-se a probabilidade de:

a) Todas as 3 terem pelo menos 1950 ml?

b) Não mais que uma ter conteúdo inferior a 1950 ml?

..../PROB/CP223.tex

86) Mostre que a taxa de falha $t(x) = f(x)/(1 - F(x))$, para $F(x) < 1$, é constante e coincidde com seu parâmetro. (Isso é usado em análise de confiabilidade de sistemas.)

..../PROB/CP224.tex

87) Determine as condições sobre as constantes c de modo que as expressões abaixo sejam funções de probabilidade:

a) $p(x) = c\alpha^x$, $\alpha \in (0,1)$ e $x = 0, 1, 2, ...$

b) $p(x) = (c-1)^{2x}$, $x = 1, 2, ...$

..../PROB/CP225.tex

88) Qual é o valor de k (inteiro) da v.a. X que tem probabilidade máxima, nos seguintes casos:

(a) $Bin(n, p)$ (b) $Poisson(\lambda)$

..../PROB/CP226.tex

89) Qual é o valor de x que tem probabilidade máxima, nos seguintes casos:

a) $Exp(\lambda)$

b) $Normal(\mu, \sigma^2)$

..../PROB/CP227.tex

90) Seja X uma v.a. com Função de Distribuição (FD) F_X. Considere $Y = f(X)$ e determine a FD F_Y das v.a.'s

(a) $-X$, (b) $|X|$, c) X^2 e d) $\sqrt{X}$

..../PROB/CP228.tex

91) Seja X uma v.a. com Função de Distribuição (FD) F_X. Determine a FD das v.a.'s Y definidas por (a) $-X$, (b) $|X|$, (c) X^2 (d) $\sqrt{X}$ e (e) $\ln(1-X)^{-1}$, quando $X \sim U_c(0,1)$

..../PROB/CP228B.tex

92) Considere X_1 e X_2 independentes com distribuição $Exp(\alpha)$.

a) Mostre que a v.a. $S = X_1 + X_2$ tem distribuição Gama$(2, \alpha)$.

b) Obtenha a densidade da v.a. $Z = Y/X$.

c) Qual a distribuição da v.a. $Z = \frac{X}{X+Y}$?

..../PROB/CP23.TEX

93) Suponha que X e Y são v.a. independentes e com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para $k > 0$, determine $P(kX - Y > 0)$ usando:

a) um método convencional

b) por condicionamento, ou seja, $P(kX - Y > 0) = \int_0^\infty P(kX - Y > 0|Y = y)f_Y(y)dy$

..../PROB/cp231.tex

94) Sendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, apresente uma função de X que tenha distribuição Qui-quadrado com 1 grau de liberdade, usando: (a) O método direto e (b) o método do Jacobiano.

..../PROB/cp232.tex

95) Mostre que, sendo X e Y v.a. independentes com distribuição de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, temos que

a) A soma $X + Y$ é Poisson.

b) A distribuição condicional de X dado $X + Y$ é binomial.

..../PROB/cp233.tex

96) Mostre que X e Y são v.a. independentes com distribuição Binomial de parâmetros (n_1, p_1) e (n_2, p_2), respectivamente, então:

a) Sob que condições a distribuição da soma $Z = X + Y$ também segue o modelo Binomial? Neste caso, quais os parâmetros de Z? (Mostre os cálculos!)

b) Verifique que a distribuição condicional de Y dado Z é Hipergeométrica.

..../PROB/cp234.tex

97) Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes. Obtenha a distribuição de $Z = \min(X_1, X_2)$.

a) $X_i \sim Exp(\lambda_i), i = 1, 2$

b) $X_i \sim Geo(p), i = 1, 2$

..../PROB/cp235.tex

98) Considere que as variáveis X e $Y \sim N(0, 1)$, independentes. Defina as variáveis $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.

a) Obtenha as densidades conjuntas de Z e W.

b) Z e W são independentes?

..../PROB/cp236.tex

99) Sejam X_1 e X_2 v.a. independentes Gama com parâmetros (n, λ) e (m, λ), respectivamente. Mostre que

a) $W = X_1/(X_1 + X_2)$ tem distribuição $Beta(n, m)$.

b) $T = X_1 + X_2$ tem distribuição $Gama(m + n, \lambda)$

c) T e W são independentes.

..../PROB/cp237.tex

100) Determine, usando apenas as definições das variáveis t e F, quais as distribuições W quando:

a) $X \sim N(0, 16)$ e $Y \sim \chi^2_{16}$ v.a's independentes, e $W = \frac{X}{\sqrt{Y}}$.

b) $X_k \sim \chi^2_k, k = 1, 2, 3,$ v.a's independentes, e $W = \frac{5X_1}{X_2+X_3}$

..../PROB/cp238.tex

101) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \qquad x \geq a.$

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP24.TEX

102) Arredonda-se 20 números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente em (-0,5; 0,5). Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3.

..../PROB/CP25.TEX

103) Arredonda-se 20 números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente em (-0,5; 0,5). Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3. (2,0 pontos)

..../PROB/cp25x.tex

104) Suponha que 5 por cento de todas as peças que saiam de uma linha de fabricação sejam defeituosas. Se 10 dessas peças forem escolhidas e inspecionadas, qual será a probabilidade de que no máximo 2 defeituosas sejam encontradas?

..../PROB/CP3.TEX

105) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Considere as seguintes v.a.'s: $W = X + Y$ e $Z = X - Y$. Mostre que a v.a. bidimensional contínua (W, Z) é uniformemente distribuída sobre o quadrado cujos vértices são (0,0), (1,1), (2,0) e (1, -1).

..../PROB/CP33.TEX

106) Seja X o resultado do lançamento de uma moeda honesta.

..../PROB/CP34.TEX

107) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x,y) = Cx \qquad\qquad 0 < x < 1, \;\; 0 < y < x^2$$

Calcule $E(Y|X)$ e $Var(Y|X)$.

..../PROB/cp35.tex

108) Sabe-se que 80% das peças produzidas por uma indústria passam por três testes de qualidade. Uma amostra de 200 peças é escolhida ao acaso da linha de produção. Qual é a probabilidade de que o número de peças na amostra que passam pelos três testes de qualidade esteja compreendido entre 154 e 170? (2,0 pontos)

..../PROB/cp35x.tex

109) Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis: 0,1,2,... Suponha que $P(X = j) = (1-a)a^j$, j=0,1,2,... (a) Para que valores de a o modelo acima faz sentido? O que representa esse valor? (b) Verifique que essa expressão representa uma legítima expressão de probabilidade. Como ela é conhecida? (c) Mostre que para quaisquer dois inteiros s e t,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

..../PROB/CP4.tex

110) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Obtenha a densidade da v.a. $Z = X - Y$ e verifique que ela não depende de θ.

..../PROB/CP43.TEX

111) Suponha que X tenha f.d.p. dada por $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP44.TEX

112) Um dado é lançado 2.500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que a soma dos pontos obtidos seja menor que 8.850.

..../PROB/CP45.TEX

113) Um dado é lançado 2.500 vezes. Determine a probabilidade aproximada de que a soma dos pontos obtidos seja menor que 8.850. (2,0 pontos)

..../PROB/cp45x.tex

114) Considere uma variável aleatória X com resultados possíveis: 0,1,2,... Suponha que $P(X = j) = (1-\alpha^2)\alpha^{2j},\ j$=0,1,2,... (a) Para que valores de α o modelo acima faz sentido? O que representa esse valor? (b) Verifique que essa expressão representa uma legítima expressão de probabilidade. Como ela é conhecida? (c) Mostre que para quaisquer dois inteiros s e t,

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t)$$

..../PROB/CP4b.tex

115) Calcule a Esperança e a Variância da variável aleatória X nos seguintes casos:
(a) $X \sim Binomial(n,p)$; (b) Uniforme contínua (a,b); (c) Geométrica (p)

..../PROB/CP5.TEX

116) Admita que X e Y representem a duração da vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes. Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, com fdp dadas por $f(x) = e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)$ e $g(y) = 2e^{-2y}I_{(0,\infty)}(y)$. Obtenha a fdp da variável aleatória $X - Y$,

..../PROB/CP501.tex

117) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = X + Y$.

..../PROB/CP502.tex

118) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Geométrica de parâmetro comum p. Obtenha a função de probabilidade de $Z = X - Y$.

..../PROB/CP503.tex

119) Sejam X e Y v.a. independentes com distribuição Exponencial de parâmetro comum λ. Obtenha a função de probabilidade de $Z = 2X + Y$.

..../PROB/cp504.tex

120) Sejam X e Y v.a.'s independentes com as seguinte f.d.p.'s:

$$g(x) = \frac{8}{x^3}, \qquad x > 2 \qquad \text{e} \qquad h(y) = 2y, \qquad 0 < y < 1.$$

a) Obtenha a f.d.p. da v.a $Z = XY$.

b) Obtenha a $E(Z)$.

..../PROB/CP53.TEX

121) Seja X uma v.a. com distribuição geométrica de parâmetro p, ou seja, com f.p. dada por

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, ...$$

a) Obtenha a f.g.m. da v.a. X;

b) Usando a f.g.m., calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

..../PROB/CP54.TEX

122) Sendo $X \sim t_{21}$, obtenha:

a) $P(X \leq 1,71)$

b) $P(X > 0,68)$

c) $P(X > -1,32)$

d) $P(1,32 < X < 2,49)$

e) $P(-0,68 \leq X \leq 1,32)$

..../PROB/cp55.tex

123) Suponha que a duração, em horas, de uma lâmpada especial tenha distribuição exponencial de parâmetro 1/3. Se uma amostra de 36 lâmpadas é observada, qual é a probabilidade de que a média amostral seja inferior a duas horas?

..../PROB/cp55x.tex

124) Seja $X \sim t_{25}$, calcule:
(a) $P(X \leq 1,7081)$, (b) $P(X > 0,6844)$ (c) $P(X > -1,3163)$
(d) $P(1,3163 < X < 2,4851)$ (e) $P(-0,6844 \leq X \leq 1,3163)$

..../PROB/cp56.tex

125) Seja $X \sim t_{25}$, encontre o valor de "a"tal que
(a) $P(X \leq a) = 0,975$, (b) $P(X > a) = 0,10$, (c) $P(|X| \leq a) = 0,90$, $P[-a \leq x \leq a] = 0,90$

..../PROB/cp57.tex

126) Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Use a desigualdade de Tchebyshev para obter:
(a) $P\left(X \leq \frac{\lambda}{2}\right) \leq \frac{4}{\lambda}$
(b) $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

..../PROB/cp58.tex

127) Considere um sequência de n experimentos de Bernoulli com probabilidade de sucesso p de ocorrer um evento A e $f_A = n_A/n$ a proporcão amostral de ocorrência de A. Use a desugualdade de Tchebyshev para justificar que
$P[\ |f_A - p\ | \geq \varepsilon\ ] \leq \frac{p\,(1-p)}{n\varepsilon^2}$

..../PROB/cp59.tex

128) Uma certa liga é formada pela reunião da mistura em fusão de dois metais. A liga resultante contém uma certa percentagem de chumbo X , que pode ser considerada uma variável aleatória. Suponha que X tenha a seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{3}{5}10^{-5}x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponha que P, o lucro líquido obtido pela venda dessa liga (por libra), seja a seguinte função da percentagem de chumbo contida: $P = C_1 + C_2X$. Calcule o lucro esperado (por libra).

..../PROB/CP6.tex

129) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição $N(0,1)$. Considere as seguintes v.a.'s: $W = X + Y$ e $Z = X - Y$. Determine a distribuição de W e Z e verifique que ela são independentes.

..../PROB/cp60.tex

130) Seja $X \sim \chi^2_{20}$, obtenha o valor de "a"tal que:

a) $P(X \leq a) = 0,10$

b) $P(X > a) = 0,95$

c) $P(X \leq a) = 0,99$

d) $P(X \geq a) = 0,025$

..../PROB/cp62.tex

131) Suponha que X e Y sejam v.a.'s tais que $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $Var(X) = \sigma_X^2$ e $Var(Y) = \sigma_Y^2$. Seja $Z = X/Y$, obtenha aproximações para $E(Z)$ e $Var(Z)$.

..../PROB/CP63.TEX

132) Sejam $X_i \sim \chi^2_{n_i}$, $i = 1, \cdots, k$, v.a.'s independentes. Usando a f.g.m., obtenha a distribuição da v.a. $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

..../PROB/CP64.TEX

133) O Ministério da saúde deseja estimar a proporção de vítimas de uma certa moléstia no país. Determine o menor tamanho de amostra necessário para que a estimativa difira da verdadeira proporção por menos de 1% com probabilidade de 0,95 quando sabe-se que a verdadeira proporção de vítimas dessa moléstia no país é inferior a 0,10.

..../PROB/CP65.TEX

134) Suponha que X tenha distribuição Normal(2;0,16). Empregando a Tabela da distribuição Normal, calcule as probabilidades:

(a) $P(X > 2)$ (b) $P(X < -1)$ (c) $P(1,8 \leq X \leq 2,1)$

..../PROB/CP7.tex

135) Seja $X \sim \chi^2_{23}$, calcule:

a) $P(X \leq 11,689)$

b) $P(X \leq 38,076)$

C) $P(X > 18,137)$

..../PROB/cp72.tex

136) Sejam X e Y v.a.'s independentes, ambas com distribuição uniforme no intervalo $(1, 2)$. Seja $Z = X/Y$.

a) Obtenha aproximações para $E(Z)$ e $Var(Z)$.

b) Obtenha a f.d.p. de Z e, em seguida, os valores exatos para $E(Z)$ e $Var(Z)$. Compare com os resultados obtidos em a).

..../PROB/CP73.TEX

137) Sejam $X_i \sim Exp(\alpha)$, $i = 1, \cdots, r$, v.a.'s independentes. Usando a FGM, mostre que

a) $S \sim Gama(r, \alpha)$, com $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_r$;

b) $W \sim \chi^2_{2r}$, com $W = 2\alpha S$.

..../PROB/CP74.TEX

138) Se 65% da população em uma comunidade é favorável à proposta de aumento nas mensalidades escolares, dê uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas desta comunidade irá conter:

a) pelo menos 50 pessoas favoráveis à proposta;

b) no máximo 75 pessoas favoráveis à proposta.

..../PROB/CP75.TEX

139) Se 65% da população em uma comunidade é favorável à proposta de aumento nas mensalidades escolares, dê uma aproximação para a probabilidade de que uma amostra aleatória de 100 pessoas desta comunidade irá conter:

a) pelo menos 50 pessoas favoráveis à proposta; (1,0 ponto)

b) no máximo 75 pessoas favoráveis à proposta. (1,0 ponto)

..../PROB/cp75x.tex

140) Suponha que a duração da vida de dois componentes eletrônicos, D_1 e D_2 tenham distribuições $N(40,36)$ e $N(45,9)$, respectivamente. Se o dispositivo eletrônico tiver de ser usado por um período de 45 horas, qual dos dispositivos deverá ser preferido? E se fosse 48 horas?

..../PROB/CP8.tex

141) Suponha que a v.a. bidimensional contínua (X,Y) seja uniformemente distribuída sobre a região $R=\{(x,y): x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Calcule ρ_{xy}.

..../PROB/CP83.TEX

142) Suponha que (X,Y)

..../PROB/cp83b.tex

143) Alguns resistores, R_i, $i=1,2,\cdots,n$, são montados em série em um circuito. Suponha que a resistência de cada um seja normalmente distribuída, com $E(R_i)=10$ ohms e $Var(R_i)=0,16$.

a) Se $n=5$, qual a probabilidade de que a resistência do circuito exceda 49 ohms ?

b) Que valor deverá ter n, para que se tenha probabilidade igual a 0,5 de que a resistência total exceda 100 ohms?

..../PROB/CP84.TEX

144) Sejam $X_1,\ X_2,\ \cdots$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) $U(0,1)$, e seja $Y_n = max\{X_1,\cdots,X_n\}$, para $n=1,2,\cdots$. Prove que $Y_n \xrightarrow{P} 1$.

..../PROB/CP85.TEX

145) Uma moeda perfeita é lançada 3 vezes. Sejam X o n^o de caras obtidas nos dois primeiros lançamentos e Y o n^o de caras obtidas no último lançamento. Obtenha:

a) A distribuição Conjunta de (X,Y).

b) As distribuições marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes?

..../PROB/CP9.teX

146) Suponha que (X,Y) tenha a seguinte distribuição conjunta:

X Y	-1	0	1	Total
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
Total	3/8	2/8	3/8	1,0

a) Mostre que $E(XY)=E(X)E(Y)$ e, consequentemente, $\rho_{XY}=0$.

b) Mostre que X e Y não são independentes.

..../PROB/CP93.TEX

147) Suponha que a duração da vida de uma peça seja exponencialmente distribuída com parâmetro 0,5. Suponha que 10 dessas peças sejam instaladas sucessivamente, de modo que a i-ésima peça seja instalada imediatamente após a peça de ordem $(i-1)$ ter falhado. Seja T_i a duração até falhar da i-ésima peça, $i=1,2,\cdots,10$. Portanto, $S=T_1+\cdots+T_{10}$ representa o tempo total de funcionamento das 10 peças. Admitindo que os T_i são independentes, calcule $P(S \geq 15,5)$.

..../PROB/CP94.TEX

148) Elabore uma macro para acumular (somar) n observações de uma $X \sim U(5, 15)$ e depois apresentar na tela o valor médio. Use $n = 10000$.

..../PROB/HTmacro01.tex

149) Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes, todas com média 100 e variância 100. Obtenha o valor esperado e a variância de $Z = (X_1 - 2X_2 + X_3)/4$.

..../PROB/IBGE2010Q29.tex

150) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes, correspondendo às medições realizadas por dois diferentes operadores. Essas variáveis aleatórias possuem a mesma média , mas as variâncias são diferentes, σ_X^2 e σ_Y^2, respectivamente. Deseja-se calcular uma média ponderada dessas duas medições, ou seja, $Z = kX + (1 - k)Y$. Qual o valor de k que torna mínima a variância de Z?

..../PROB/IBGE2010Q34.tex

151) Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e $B_1, B_2, \cdots, B_n$ eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Para $j = 1, \cdots, n$, suponha que B_j seja independente de $\bigcap_{i=1}^n A_i$, e que os $B_j's$ sejam disjuntos 2 a 2. Mostre que $\bigcup_{j=1}^n B_j$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i$ são independentes.

..../PROB/MN01024.tex

152) Se $X \sim B(n, p)$, qual é o modelo de $Y = n - X$?

..../PROB/MN02003.tex

153) Sendo X uma variável aleatória com distribuição F_X, determine a função de dstribuição de $Y = -X$ e $W = |X|$.

..../PROB/MN02011.tex

154) Numa certa região a probabilidade de chuva é $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Um morador da região, acostumado com as variações muito frequentes do clima, afirma que acerta mais que os meteorologistas. Ele costuma jogar sua moeda, que indica chuva com probabilidade $\beta \in (0, 1)$. Suponha que são feitas, de forma independente, previsões em três dias.

a) Discuta o comportamento probabilístico do número de acertos do morador

b) Supondo α conhecido, qual deve ser β de modo que a probabilidade de três acertos seja máxima?

c) Um novato na região diz que, pra maximizar o acerto, é melhor dizer que chove todo dia. O que você acha?

..../PROB/MN02037.tex

155) Se $X \sim Gama(\alpha, 1)$ e $Y \sim Poison(\lambda$, mostre que $P(X > \lambda) = P(Y < \alpha)$.

..../PROB/MN02038.tex

156) Sendo $X \sim B(n, p)$, qual é o valor k (k inteiro entre 0 e n), que tem probabilidade máxima?

..../PROB/MN02041.tex

157) Sendo X e Y independentes com $X \sim N(0, 1)$ e Y igual a 1 ou -1, com mesma probabilidade. Para $Z = XY$, calcule o coeficiente de correlação entre X e Z. As variáveis X e Z são independentes?

..../PROB/MN05025.tex

158) Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequencia de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Seja N uma outra variável, assumindo valores inteiros não negativos, e independente das $X_i's$. Determine a média e a variância de $Y = \sum_{i=1}^N X_i$.

..../PROB/MN05026.tex

159) Para $X \sim N(0, 1)$ e $Y \sim N(0, 2)$, independentes.

a) Determine a função geradora de momentos de $X^2 + Y^2$ e, a partir daí, sua média.

b) Calcule a função geradora de momentos conjunta de X^2 e Y^2 e, a partir daí, a média de X^2.

..../PROB/MN05043.tex

160) Seja X uma v.a. tal que

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n/2)!}, & \text{se } n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a fgm de X e identifique sua distribuição.

..../PROB/MN05051.tex

161) Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias *i.i.d.*, seguindo o modelo Uniforme Contínuo em (0,1). Calcule o limite em probabilidade de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-\log X_k)$.

..../PROB/MN06028.tex

162) Sejam $X_n, n \geq 1$ variáveis aleatórias *i.i.d* com média μ e variância σ^2, ambas finitas. Com o uso do Teorema Central do Limite, determine o tamanho da amostra n para que $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}) \simeq 0,95$.

..../PROB/MN06038.tex

163) Seja $\{X_n, n \geq 1\}$ uma sequencia de variáveis aleatórias *i.i.d.* com média 0 e variância 2. Obtenha o limite em distribuição de

a) $\frac{\sqrt{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$

b) $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}}$

..../PROB/MN06055.tex

164) Sejam X_n e Y_m variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson de parâmetros m e n, respectivamente. Mostre que

$$\frac{(X_n - n) - (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{para } m \text{ e } n \to \infty.$$

..../PROB/MN06065.tex

165) O tempo em minutos, X, para a digitação de um texto, é considerado uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada pela função abaixo. Obtenha o valor esperado de X.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

..../PROB/MPU2007Q40.tex

166) A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta das freqüências relativas a X e Y, onde:

X: preço, em reais, do produto X.

Y: preço em reais, do produto Y.

Para fabricação de uma peça Z são utilizadas os produtos X e Y e está sendo analisada a viabilidade econômica desta peça. Se Z utiliza 3 unidades de X, e 5 unidades de Y, qual é o custo médio de Z?

..../PROB/MPU2007Q47.tex

Y / X	2	3	4
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1
3	0.3	0	0.1

167) A tabela abaixo apresenta a distribuição conjunta das freqüências relativas a X e Y, onde:

X: preço, em reais, do produto X.

Y: preço em reais, do produto Y.

Y / X	2	3	4
1	0.2	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1
3	0.2	0.1	0.1

Para fabricação de uma peça Z são utilizadas os produtos X e Y e está sendo analisada a viabilidade econômica desta peça. Se Z utiliza 3 unidades de X, e 5 unidades de Y, qual é o custo médio de Z?

..../PROB/MPU2007Q47b.tex

168) **(Modelo de Ehrenfest)** Consideremos duas urnas A e B com um total de $2N$ bolas numeradas de 1 a $2N$. A cada etapa, sorteamos um número aleatório entre $1, 2, \cdots, 2N$ e a bola com o número sorteado é transferida para a outra urna. Sejam X_0 o número de bolas na urna A no início e X_n o número de bolas na urna A após a n-ésima etapa. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Se for, descreva sua matriz de probabilidades de transição.

..../PROB/PE1.TEX

169) Uma partícula nos pontos $0, 1, 2, 3$ e 4 de um círculo inicia seu movimento no estado 0. Em cada etapa ela tem probabilidade p de se mover para o seu vizinho da direita (sentido horário) e $1 - p$ para a esquerda. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ a posição da cadei na n-ésima etapa

(a) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Explique com detalhes.

(b) Se for, determine a matriz de probabilidades de transição.

..../PROB/PE10.TEX

170) Mostre que a distribuição exponencial tem a propriedade de *falta de memória*, ou seja,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$$

..../PROB/PE101.TEX

171) Para uma série de ensaios dependentes, a probabilidade de sucesso em qualquer ensaio é $p_k = (k + 1)/(k + 2)$, onde k é o número de sucessos nos dois últimos ensaios. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Sucesso no n-ésimo ensaio}).$$

..../PROB/PE102.TEX

172) Suponha que 6 bolas são colocadas em duas urnas A e B e que 3 dessas bolas são vermelhas e o restante pretas. Inicialmente, 3 bolas são colocada na urna A e 3 na B ao acaso. A cada etapa uma bola é retirada aleatoriamente de cada urna e colocada na oposta. Seja X_n o número de bolas pretas na urna A após a n-ésima etapa. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Se for, determine a matriz de probabilidades de transição.

..../PROB/PE11.TEX

173) [**Modelo de Fila**] Clientes utilizam um serviço com dois servidores (guichês). Em cada um dos guichês, independente dos outros e das possíveis chegadas, um usuário tem probabilidade p_0 de ser atendido durante um intervalo de tempo unitário e, se isso acontece o usuário seguinte começa a ser atendido no início do próximo intervalo de tempo. Suponha que um cliente chega ao sistema (fila) com probabilidade p_1, ou não chega ninguém, durante o intervalo de tempo unitário. Seja

X_0: número de clientes na fila no instante inicial

X_n: número de clientes na fila no instante $n \geq 1$

Este problema pode ser formulado em termos de uma Cadeia de Markov? Por quê? Em caso positivo, indique quais são os estados e qual a matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$.

..../PROB/PE12.TEX

174) Uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ com $E = \{0, 1, 2\}$, $\boldsymbol{\pi}^{(0)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e cujas linhas da matriz de transição são dadas por $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(1, 0, 0)$

a) Determine $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 2)$

b) Determine $P(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1)$

c) Determine $P(X_2 = 1, X_0 = 1 | X_1 = 0)$

..../PROB/PE13.TEX

175) [**Previsio do tempo**] Suponha que o fato de chover ou não amanhã dependa apenas de se choveu ou não nos últimos dois dias (hoje e ontem). Se choveu nos últimos dois dias (estado 0), então choverá amanhã com probabilidade 0,7; se choveu hoje mas não ontem (estado 1), então choverá amanhã com probabilidade 0,5; se choveu ontem mas não hoje (estado 2), então choverá amanhã com probabilidade 0,4; se não choveu nos últimos dois dias (estado 3), então choverá amanhã com probabilidade 0,2. Seja X_n a condição do tempo no dia n. (a) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Explique com detalhes. (b) Se for, qual a matriz de transição de probabilidade desta cadeia?

..../PROB/PE14.TEX

176) Consideremos que o fato de chover ou não amanhã dependa apenas de se choveu ou não nos últimos três dias (hoje, ontem e anteontem). (a) Este sistema pode ser analisado através de uma CM? (b) Quais e quantos são os estados desta cadeia? (c) Suponha agora que se choveu nos últimos 3 dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,8; se não choveu nos últimos 3 dias, então choverá amanhã com probabilidade 0,2; em qualquer outro caso o tempo será igual ao de hoje com probabilidade 0,6. Qual a matriz de transição?

..../PROB/PE15.TEX

177) [**Equilíbrio de Hardy-Weinberg**] Considere uma população de individuos onde cada um deles tem um particular par de genes e cada gen é classificado como sendo do tipo A ou do tipo a. Vamos assumir que as porcentagens de individuos que tem os pares de genes AA, aa ou Aa $(= aA)$ são, respectivamente, P_0, q_0 e r_0 (com $P_0 + q_0 + r_0 = 1$). Quando dois individuos se "casam´´, cada um deles contribui com um de seus genes, escolhido ao acaso, para formar o seu descendente. Vamos assumir que os casamentos ocorrem ao acaso e que cada individuo pode casar com qualquer outro individuo. Determine as porcentagens de individuos na próxima geração cujos genes são AA, aa e Aa, chamando estas porcentagens de

p, q e r, respectivamente. Qual a matriz de transição. (Sugestâo: condicione sobre os genes dos genitores (pais))

..../PROB/PE16.TEX

178) Consideremos o Passeio Casual nos inteiros, com X_0 a posição da partícula no instante inicial e X_n a posição da partícula no instante n. Calcule a probabilidade de transição de n passos quando a partícula parte do estado i, ou seja, calcule $P(X_n = j|X_0 = i)$.

..../PROB/PE17.TEX

179) Considere uma cadeia cuja matriz de Markov com 3 estados cujas linhas da matriz de transição são (1/4,3/4,0), (1/3,1/3,1/3) e (0,1/4,3/4). Calcule (a) $P(X_0 = \ 0, X_1 = \ 1,\ X_2 = 1)$, (b) $P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0)$, (c) $\boldsymbol{\pi}_1$, (d) $\boldsymbol{P}^{(2)}$ (e)$\boldsymbol{\pi}_2$.

..../PROB/PE18.TEX

180) Consideremos uma cadeia de Markov com 2 estados cuja matriz de transição é

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Mostre por indução matemática que a matriz de transição em n passos é dada por

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

..../PROB/PE19.TEX

181) Classifique os estados da cadeia dada pela matriz

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4/12 & 4/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/12 & 1/12 & 4/12 & 4/12 & 1/12 \end{pmatrix}$$

..../PROB/PE2.TEX

182) Uma matriz de probabilidade de transição é dita duplamente estocástica de a soma em cada coluna é 1, ou seja, $\sum_{i=1} P_{ij} = 1, \forall j$. Se tal cadeia é irredutível e aperiódica e consiste de $M+1$ estados: $0, 1, \cdots, M$, mostre que as probabilidades limites são dadas por

$$\pi_j = \frac{1}{M+1}, \quad j = 0, 1, \cdots, M.$$

Dica: apenas verifique a condição necessária.

..../PROB/PE20.TEX

183) Seja Y_n o resultado

..../PROB/PE21.TEX

184) Consideremos que o fato de chover, ou não, hoje depende apenas do fato de ter chovido, ou não, ontem. Suponhamos que se choveu ontem, choverá hoje com probabilidade α; se não choveu ontem, choverá hoje com probabilidade β. Este problema pode ser formulado em termos de uma Cadeia de Markov? Por quê? Em caso positivo, qual a matriz de probabilidades de transição $\boldsymbol{P}$.

..../PROB/PE3.TEX

185) Considere a matriz $\boldsymbol{P}$ dada abaixo, que é uma matriz de transição em um passo. Calcule a matriz de probabilidades de transição em 4 (quatro) passos.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

..../PROB/PE4.TEX

186) Consideremos o passeio aleatório em $\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2\}$ com $p_{i,i+1} = p$ e $p_{i,i-1} = 1 - p = q, \forall i \in \boldsymbol{Z}$. Como todos os estados se comunicam, então ou são todos *recorrentes* ou todos *transitórios*. Prove que se $p = \frac{1}{2}$ todos os estados serão recorrentes e se $p \neq \frac{1}{2}$ todos serão transitórios.

Obs. Notemos que basta verificar se o estado 0 é recorrente. Temos que $p_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ e $n! \simeq n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$ (conhecida como aproximação de Stirling). Use que

- se $\sum_{n \geq 1} p_{00}^{2n} = \infty$ então 0 é recorrente
- se $\sum_{n \geq 1} p_{00}^{2n} < \infty$ então 0 é transitório

..../PROB/PE5.TEX

187) Considere uma agência dos correios com dois guichês. Quando o cliente C chega à agência, ele percebe que já estão sendo atendidos os clientes A e B e ele será atendido tão logo algum guichê desocupe. Se o tempo gasto por cada guichê é exponencialmente distribuído com taxa λ, qual é a probabilidade que o cliente C seja o último a sair da agência?

..../PROB/PE50.TEX

188) Considere um processo de ramificação tendo $X_0 = 1$ e $\mu > 1$. Prove que π_0 é a *menor solução positiva* da Equação ????.

Dica: Seja π uma solução qualquer de $\pi = \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j P_j$. Mostre por indução matemática que $\pi \geq P\{X_n = 0\}$ para todo n e faça $n \to \infty$. Por indução, argumente que $P\{X_n = 0\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_{n-1} = 0\}^j p_j$.

..../PROB/PE51.TEX

189) Para um processo de ramificação, calcule π_0 quando

(a) $P_0 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{3}{4}$,

(b) $P_0 = \frac{1}{4}, \quad P_1 = \frac{1}{2}, \quad P_2 = \frac{1}{4}$,

(c) $P_0 = \frac{1}{6}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \quad P_2 = \frac{1}{3}$,

..../PROB/PE52.TEX

190) Prove o Teorema 3.1 do livro texto.

..../PROB/PE53.TEX

191) Consideremos um processo estocástico com matriz de transição dada abaixo. Determine a distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$ que satisfaz $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ com $\sum_{i=0}^{1} \pi_i = 1$.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

..../PROB/PE6.TEX

192) Considere dois processos de Poisson independentes $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$. Determine a probabilidade que hajam duas ocorrências do processo $N_1(t)$ antes que ocorra uma do processo $N_2(t)$.

..../PROB/PE61.TEX

193) Sejam $\{N_i(t), t \geq 0\}$ dois processos de Poisson independentes, com taxas $\lambda_i,\ i = 1, 2$. Mostre que $\{N(t), t \geq 0\}$, com $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, é um processo de Poisson com taxa $\lambda_1 + \lambda_2$.

..../PROB/PE62.TEX

194) No exercício anterior, qual é a probabilidade de que a primeira ocorrência do processo combinado $N(t)$ seja oriunda de $N_1(t)$?

..../PROB/PE63.TEX

195) Para um processo de Poisson, mostre que para $s < t$,

$$P\{N(s) = k | N(t) = n\} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

..../PROB/PE64.TEX

196) Suponha que os eventos de um processo de poisson com taxa λ possam ser classificados independentemente em k tipos com probabilidades $p_1, p_2, \cdots, p_k$, com $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Denote por $N_i(t)$ o número de eventos do tipo $i,\ i = 1, \cdots, k$. O que podemos dizer sobre os processos $N_i(t)$? Faça os cálculos necessários.

..../PROB/PE65.TEX

197) Um processo estocástico $\{X_i(t), t \geq 0\}$ é denominado de *Processo de Poisson Composto* se ele pode ser escrito como $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,\ t \geq 0$, onde $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson e $\{Y_n, n \geq 0\}$ é uma família de v.a.i.i.d., independentes de $\{N(t), t \geq 0\}$.

a) O processo de Poisson usual pode ser considerado um caso particular deste processo? Em que caso?

b) Dê um exemplo prático deste processo.

..../PROB/PE66.TEX

198) Para o processo da questão anterior:

a) Determine sua média e sua variância.

b) Suponha que famílias migrem para uma determinada região segundo um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$ por semana. Se o número de pessoas em cada família é independente e pode assumir os valores 1, 2, 3 e 4 com probalidades $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$, respectivamente, qual o valor esperado e a variância do número de indivíduos migrando para essa área durante um período de 5 semanas.

..../PROB/PE67.TEX

199) Considere uma agência de correios com dois guichês. As pessoas A, B e C entram simultaneamente na agência; A e B vão diretamente para os guichês e C fica esperado até que um deles termine. Qual a probabilidade que A permaneça em atendimento após os dois outros saírem quando:

a) o tempo de atendimento de cada guichê é exatamente 10 minutos (não aleatório)?

b) o tempo de serviço é i minutos com probabilidade $\frac{1}{3}$ $i = 1, 2, 3$.

c) o tempo de serviço é exponencial com média $1/\mu$.

..../PROB/PE69.TEX

200) Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ a cadeia de Ehrenfest e suponha que X_0 tenha distribuição $Binomial(d, 1/2)$. Encontre a distribuição de X_1.

..../PROB/PE7.TEX

201) (**Modelo de Estoques**) Consideremos que as demandas D de um certo produto A em uma determinada loja são v.a.i.i.d. com distribuição $Poisson(\lambda)$. Designemos por $X_i, i \geq 1$, os níveis de estoque ao final do i-ésimo dia e por S a capacidade do estoque. A reposição do estoque é feita da seguinte forma: se no final do dia i o nível de estoque X_i é menor que s, então são ordenadas $S - X_i$ peças para reposição, de modo que no dia seguinte o estoque inicial será S; se tivermos $s \leq X_i \leq S$, então não é feita nenhuma reposição de estoque. Temos, portanto,

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i - D_{i+1} & ; \quad s \leq X_i \leq S \\ X_{i+1} = S - D_{i+1} & ; \quad X_i < s \end{cases}$$

Seja X_0 o nível de estoque no primeiro dia de atividade da loja. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma CM? Se for, determine sua matriz de probabilidades de transição.

Obs: Estoques negativos no final de uma dia serão interpretados como peças que seriam vendidas caso houvessem peças suficientes no estoque.

..../PROB/PE8.TEX

202) Considere o passeio casual de uma partícula nos inteiros $E = \{-N, -N+1, \cdots, N-1, N\}$, $N \geq 1$, com probabilidades de transição dadas por

$$p_{-N,-N+1} = 1 = p_{N,N-1} \quad e \quad p_{i,j} = \frac{1}{2} \quad se \quad j \in \{i-1, i+1\}, i \in \{-N+1, \cdots, N-1\}.$$

Determine a medida de probabilidade invariante da cadeia para $N = 2$.

..../PROB/PE9.TEX

203) As probabilidades de que dois eventos independentes ocorram são p_1 e p_2, respctivamente. Qual a probabilidade:

a) de que nenhum desses eventos ocorra?

b) de que pelo menos um desses eventos ocorra?

..../PROB/PM05019.tex

204) Para estudar o comportamento do mercado automobilístico, as marcas foram divididas em três categorias: marca F, marca W, e as demais marcas reunidas como a marca X.

..../PROB/PM05039.tex

205) A empresa `M & B` tem 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

Idade Sexo	Homens (H)	Mulheres (M)	Total
`< 25 anos` (A)	2.000	800	2.800
`25-40 anos` (B)	4.500	2.500	7.000
`> 40 anos` (C)	1800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ele ser:

a) um empregado com 40 anos de idade ou menos;

b) um empregado com 40 anos de idade ou menos, e mulher;

c) um empregado com mais de 40 anos de idade, e que seja homem;

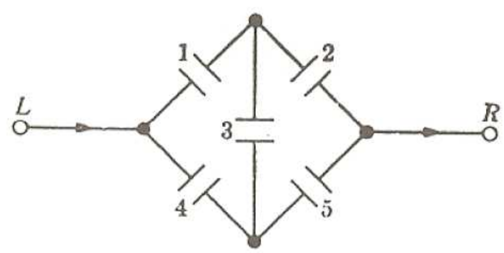
d) uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.

..../PROB/PM05040.tex

206) Prove que, se A e B são independentes, também o serão A^c e B^c, A e B^c, e A^c e B.

............/PROB/PM05046.tex

207) Na figura abaixo temos um sistema chamado *ponte*, com 5 relés, onde cada um funcionará com probabilidade p, independente dos demais. Calcule a confiabilidade dessa ponte, ou seja, a probabilidade de a energia atravessar a ponte da esquerda para a direita.



............/PROB/PM05048.tex

208) Sejam A, B e C eventos independentes.

a) Prove que A é independente de $B \cap C$

b) Prove que C é independente de $A \cup B$

............/PROB/PM05055.tex

209) Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que em um minuto se tenha:

a) dez ou mais chamadas;

b) menos que nove chamadas;

c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

............/PROB/PM06022.tex

210) Examinaram-se 2.000 ninhadas de cinco porcos cada uma, segundo o número de machos. Os dados estão representados na tabela abaixo.

N^o de Machos	N^o de Ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40

a) Calcule a proporção média de machos.

b) Calcule, para cada valor de X, o número de ninhadas que você deve esperar se $X \sim Binomial(5, p)$, onde p é a proporção média de machos calculada em (a).

............/PROB/PM06025.tex

211) Suponha que X seja uma v.a. discreta, com f.p. $p(x) = 2^{-x}, x = 1, 2, \cdots$. Calcule:

(a) $P(X ser par)$, (b) $P(X \leq 3)$, (c) $P(X \geq 10)$,

............/PROB/PM06044.tex

212) Nas situações abaixo, descreva como chegar às distribuições solicitadas (indicadas, e quais as suposições necessárias (se houver).

i) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *vaiid* $\sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \chi^2(n)$

ii) $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \chi^2(n) \Longrightarrow t(n)$

iii) $X \sim \chi^2(n)$ e $Y \sim \chi^2(m) \Longrightarrow F(m, n)$

iv) $X \sim \Gamma(n, \lambda_1)$ e $Y \sim \Gamma(m, \lambda_2) \Longrightarrow Beta(m, n)$

v) $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \Longrightarrow Cauchy(0, 1)$

..../PROB/Prob1.tex

213) Certo supermercado tem duas entradas, A e B. Fregueses entram pela entrada A conforme um processo de poisson de taxa média 15 fregueses por minuto. Pela entrada B, entram fregueses conforme um outro processo de Poisson, independente do primeiro, com taxa média de 10 por minuto.

..../PROB/Prob10.tex

214) Considere duas amostras: $X_i, i = 1, \cdots, n, vaiid \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y_i, i = 1, \cdots, m, vaiid \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2), X_i \perp Y_i, \forall(i, j)$. Sejam $\overline{X}_k$ e S_k^2 a média e a variância amostral em uma amostra de tamanho k. Indique como a partir delas podemos chegar às distribuições χ^2, t e F e os parâmetros dessas distribuições.

..../PROB/Prob2.tex

215) Seja $X \sim \Gamma(n, \lambda)$. Determine a distribuição de $Y = 2\lambda X$.

..../PROB/Prob3.tex

216) Indique (justifique) qual a relação entre as variáveis:

i) $t(m)$ e $F(n, m)$

ii) $U(0, 1)$ e $Beta(\alpha, \beta)$

iii) $t(n)$ e Cauchy(0,1).

..../PROB/Prob4.tex

217) Sejam as v.a. $X_1, \cdots, X_n$ independentes e exponenciais com parâmetros $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, respectivamente.

i) Mostre que a distribuição de $Y = \min_{1 \le i \le n} X_i$ é exponencial. Qual o parâmetro?

ii) Prove que para $k = 1, \cdots, n$, $P(X_k = \min_{1 \le i \le n} X_k) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$

(**Sugestão:** X_k e $\min_{i \ne k} X_i$ são independentes e, pelo item (i), exponenciais. Considere o evento $[X_k < \min_{i \ne k} X_i]$)

..../PROB/Prob5.tex

218) Sejam X e Y vaiid $\sim N(0, 1)$. Mostre que $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ e $U = (X - Y)/\sqrt{2}$ também são independentes $N(0, 1)$

..../PROB/Prob6.tex

219) Sejam X e Y vaiid $\sim N(0, 1)$. Provar que $U = X + Y$ e $V = X - Y$ são independentes e achar suas distribuições.

..../PROB/Prob6b.tex

220) [*Aproximação Poisson para a Binomial*] Consideremos n ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso $p_n = \lambda/n$ em cada prova e S_n o número de sucessos nos n ensaios. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

..../PROB/Prob7.tex

221) Sejam $X_1, \cdots, X_n$ v.a. com distribuição Poisson com parâmetros $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivamente.

$i)$ Mostre que $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$

$ii)$ Use indução para mostrar que $X_1 + \cdots + X_n \sim Poisson(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$

..../PROB/Prob8.tex

222) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte distribuição conjunta:

X / Y	-1	1	2	Total
-2	0,2	0,1	0	0,3
-1	0,2	0,1	0,1	0,4
0	0,1	0	0,2	0,3
Total	0,5	0,2	0,3	1,0

a) Obtenha a distribuição condicional de X, dado $Y = -1$;

b) Obtenha a distribuição da v.a. $Z = X(Y + 1)$.

..../PROB/ques1.tex

223) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com distribuição conjunta dada na tabela abaixo. Obtenha o coeficiente de correlação entre X e Y.

X / Y	-1	0	1	Total
1	0,3	0,1	0,1	0,5
2	0,1	0	0,2	0,3
3	0,1	0,1	0	0,2
Total	0,5	0,2	0,3	1,0

..../PROB/ques12.tex

224) Uma urna contém duas bolas numeradas, 1 e 2. Uma bola é retirada ao acaso da urna. Em seguida, uma moeda honesta é lançada tantas vezes quanto o número mostrado na bola selecionada. Sejam X o $n^{\underline{o}}$ de caras obtido e Y o $n^{\underline{o}}$ da bola selecionada.

a) Obtenha a distribuição conjunta de (X, Y);

b) Calcule a $P(X \leq 1, Y > 1)$;

c) Calcule a $P(X \leq 1 | Y = 1)$;

..../PROB/ques2.tex

225) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = e^{-2(x+y)} \qquad\qquad x > 0, \;\; y > 0$$

Obtenha a f.d.p. da v.a. $Z = \frac{X+Y}{4}$.

..../PROB/ques22.tex

226) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = k(2x + y) \qquad\qquad 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 2$$

a) Que valor deve ter a constante k?

b) Calcule a $P(0 < X \leq 1/2 \mid 0 \leq Y < 1)$;

..../PROB/ques3.tex

227) Sejam $X_i \sim N(k, k^2)$, para $k = 1, 2$, v.a.'s independentes. Calcule as seguintes probabilidades:
a) $P(W > 1,323)$, com $W = (X_1 - 1)^2$.
b) $P(V \leq 39,9)$, com $V = \frac{(X_2-2)^2}{4(X_1-1)^2}$. [Obs. Lembre que $F(1,n) = 1/F(n,1)$ e $F(1,n) = t_n^2$]
..../PROB/ques32.tex

228) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = 2 \qquad 0 < x < y, \;\; 0 < y < 1$$

a) Obtenha a f.d.p. condicional de X, dado $Y = y$;
b) Obtenha a f.d.p. condicional de Y, dado $X = x$.
..../PROB/ques4.tex

229) Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com a seguinte f.d.p. conjunta:

$$f(x, y) = 3x \qquad 0 < x < 1, \;\; 0 < y < x$$

Calcule $E(Y|X)$ e $Var(Y|X)$.
..../PROB/ques42.tex

230) Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição. Obtenha a distribuição da diferença entre os dois números observados.
..../PROB/ques5.tex

231) Determine a distribuição da Variável $X + Y$ quando X e Y são v.a. independentes tais que (i) $X \sim Bin(n_1, p)$ e $Y \sim Bin(n_2, p)$, (ii) $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$.
..../PROB/ques7.tex

232) Determine a distribuição da Variável $Z = min(X, Y)$ quando X e Y são v.a. independentes, ambas com distribuição Geométrica de parâmetro p.
..../PROB/ques8.tex

233) Determine a distribuição da Variável $X + Y$ quando X e Y são v.a. independentes tais que (i) $X \sim Bin(n_1, p)$ e $Y \sim Bin(n_2, p)$, (ii) $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$.
..../PROB/quest7.tex

234) Determine a distribuição da Variável $Z = min(X, Y)$ quando X e Y são v.a. independentes, ambas com distribuição Geométrica de parâmetro p.
..../PROB/quest8.tex

235) Uma variável aleatória X segue uma distribuição uniforme no intervalo [0,1]. A distribuição condicional $Y|(X = x)$ segue uma distribuição binomial com parâmetros $n = 6$ e $p = x$. Obtenha o valor esperado e a variância de Y.
..../PROB/TSE2007Q36.tex