

Percolação para Principiantes

Gastão A. Braga

Departamento de Matemática - UFMG gbraga@mat.ufmg.br

Marcelo Martins de Oliveira

Departamento de Física - UFMG mancebo@fisica.ufmg.br

Remy Sanchis

Departamento de Matemática - UFMG rsanchis@mat.ufmg.br

Tiago Alves Schieber

Departamento de Física - UFMG tiago_schieber@yahoo.com.br

7 de Outubro de 2002

Conteúdo

1	O que é Percolação?	3
1.1	Introdução	3
1.2	Notação e algumas definições iniciais	5
1.3	A rede hipercúbica	9
1.4	O problema da transição de fase em percolação	10
1.5	Existência de transição de fase em dimensão $d \geq 2$	12
2	Caracterização da Fase Subcrítica	19
2.1	Decaimento exponencial da função conectividade	19
2.1.1	Cálculo de τ_{xy} em dimensão $d = 1$	19
2.1.2	Decaimento exponencial de τ_{xy} em dimensão $d \geq 1$	20
2.2	Caracterização da fase subcrítica	22
3	Comportamento Crítico numa Rede de Bethe	27
3.1	Redes de Bethe	27

3.2	Cálculo das funções termodinâmicas	30
3.3	$p_c = \frac{1}{r-1}$ para percolação em \mathcal{B}_r	33
3.4	O expoente crítico β	36
3.5	Dedução formal de que $\beta = 1$ se $r > 3$	38
3.6	Dedução rigorosa de que $\beta = 1$ se $r > 3$	39
3.7	Outras possibilidades	44

Capítulo 1

O que é Percolação?

1.1 Introdução

Historicamente, o modelo de percolação surge do estudo do fenômeno de transporte de um fluido através de um meio poroso. Por exemplo, o petróleo através de uma rocha, ou a água em um filtro de areia. Formulado no final da década de 50 por Broadbent e Hammersley [1], o modelo de percolação concentra-se em descrever o meio poroso, que será visto como uma rede de canais aleatórios, por onde escoar um fluido determinístico.¹ Modelos de percolação encontram aplicação em várias situações físicas de interesse tais como o problema da mecânica estatística de sistemas ferromagnéticos diluídos [3], no problema do transporte de corrente elétrica através de uma rede composta por um grande número de resistores [4], em problemas de prospecção de petróleo [5] e até mesmo na propagação de epidemias e de incêndios em bosques [6].

Modelemos o meio poroso como um substrato sólido em cujo interior existe um certo número de pequenos canais e poros em pontos escolhidos ao acaso. Se o número de canais for suficientemente grande então eles estarão interligados e o meio se tornará permeável à passagem do fluido. Neste caso dizemos que houve a percolação do fluido.

Podemos reformular o modelo descrito acima a fim de que possamos tratá-lo analiticamente. Começemos supondo que os canais formem um reticulado no interior do sólido, como uma rede cúbica (veja a figura 1.1 para um exemplo bidimensional). Cada sítio da

¹Diferentemente dos modelos de difusão, em que o fluido é aleatório e o meio determinístico. Ver [2].

rede então representaria um poro e cada elo representaria um pequeno canal ligando dois sítios vizinhos.

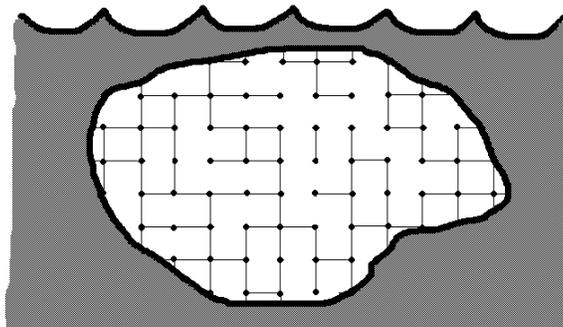


Figura 1.1: Modelo para uma rocha porosa bidimensional imersa em líquido.

Para simular a passagem do líquido através dos poros, nós diremos que um elo está *aberto* com probabilidade p e *fechado* com probabilidade $1 - p$, com $0 \leq p \leq 1$. Dessa forma, passamos a imaginar configurações de elos abertos e fechados. Cada configuração ocorre então com uma certa probabilidade, dada por

$$p^{|A|}(1 - p)^{|F|}, \quad (1.1)$$

onde $|A|$ é o número de elos abertos e $|F|$ é o número de elos fechados da configuração (veja a figura 1.1). A fórmula acima só tem importância se $|A|$ e $|F|$ forem ambos finitos pois, caso contrário, a probabilidade de ocorrência de uma dada configuração será sempre nula.

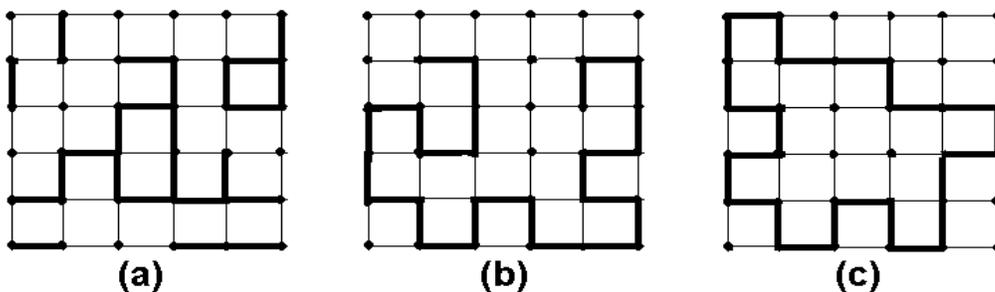


Figura 1.2: Três configurações diferentes, porém todas com exatamente 24 elos abertos e 36 fechados, em uma rede bidimensional 6×6 . A probabilidade de cada uma dessas configurações é $p^{24}(1 - p)^{36}$.

Nas próximas seções nós vamos generalizar este modelo formulando-o inicialmente num *grafo*, posteriormente numa *rede hipercúbica* d -dimensional e, finalmente, num *grafo tipo*

árvore muito usado em Física, a *rede de Bethe*. Teremos sempre em mente rede infinitas e, por isto, uma configuração sempre terá peso estatístico nulo. Seremos então levados a definir conjuntos de configurações com peso estatístico não nulo. Consideraremos ainda que haverá elos ligando apenas dois sítios vizinhos, de forma que estudaremos a percolação de primeiros vizinhos. Mesmo com uma rede simples observaremos a existência de um *fenômeno crítico*, caracterizado por uma mudança de fase. A ocorrência de fenômenos críticos é um dos principais motivos do sucesso do modelo de percolação de elos. Neste trabalho, estaremos interessados nos aspectos matemáticos da teoria. Por isto, a nossa exposição se baseia nas referências [3, 7, 8]. Uma exposição introdutória em nível de pós-graduação pode ser encontrada em [9].

Essas notas de aula foram preparadas a partir dos trabalhos [10, 11, 12, 13]. No primeiro capítulo mostramos que o modelo de percolação tem uma transição de fase num ponto específico p_c caso a dimensão do modelo seja maior ou igual a dois; no segundo capítulo nós introduzimos algumas desigualdades de correlação e as usamos para caracterizar a fase subcrítica ($p < p_c$) como sendo aquela em que a função conectividade decai exponencialmente; finalmente, no terceiro capítulo, nós nos restringimos a uma rede de Bethe e obtemos informações sobre o comportamento de certas grandezas na vizinhança do ponto crítico.

1.2 Notação e algumas definições iniciais

Nesta seção estabelecemos uma notação e damos algumas definições necessárias para podermos definir o modelo de percolação.

Definição 1.1 *Um grafo G é um par (V, E) , onde V é um conjunto enumerável de pontos, chamados vértices e E é um conjunto de pares não-ordenados de vértices, chamados elos.*

Denotamos o elo e formado pelos vértices x e y por $e = \{x, y\}$. Conforme a terminologia sugere, nem sempre devemos pensar em um grafo como um par abstrato, mas como uma coleção de vértices dos quais alguns são conectados por elos. Podemos ter, então, uma representação geométrica de um grafo e na verdade algumas vezes essa é a maneira mais fácil de interpretarmos um grafo. A representação geométrica de um grafo vive naturalmente em \mathbb{R}^3 , no entanto, podemos desenhá-la no plano se permitirmos uma superposição

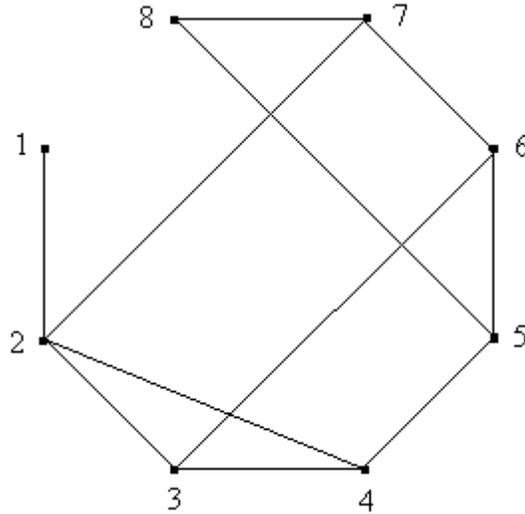


Figura 1.3: Grafo G

de elos. Veja a ilustração na figura 1.2 onde

$$G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 24, 36, 58\})$$

Um *caminho* é um conjunto de elos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ tal que seus vértices x_1, \dots, x_{n+1} são distintos (veja figura 2-b). Se $x_1 = x_{n+1}$ dizemos que os elos $\{e_1, \dots, e_n\}$ formam um *circuito* (veja figura 2-c). Um grafo *acíclico* é um grafo que não contém circuitos. Dois vértices z e w estão *ligados* se existir um caminho $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $x_i = z$ e $x_j = w$ para algum $0 \leq i, j \leq n + 1$.

Um grafo G é conexo se para todo par de vértices distintos $\{x, y\}$ existir um caminho ligando x até y . Se um grafo G tiver a propriedade de existir um *único* caminho ligando quaisquer dois de seus vértices dizemos que o grafo G é uma *árvore*. É fácil ver que um grafo é conexo e acíclico se, e somente se, ele é uma árvore (veja figura (1.4)).

Em uma árvore, a *distância* entre dois vértices x e y ($|x - y|$) é o número de elos que formam o único caminho entre x e y . Em geral, definimos a distância entre dois vértices de um grafo como o número *mínimo* de elos que são necessários para formar um caminho os ligando. Um vértice do grafo será chamado de *origem*, este vértice será escolhido para cada grafo que iremos estudar.

Atribuímos a cada elo de um grafo G , aleatoriamente, a propriedade *aberto* ou *fechado*: ao elo e associamos uma variável ω_e que assumirá os valores 1 (se o elo é aberto) ou 0

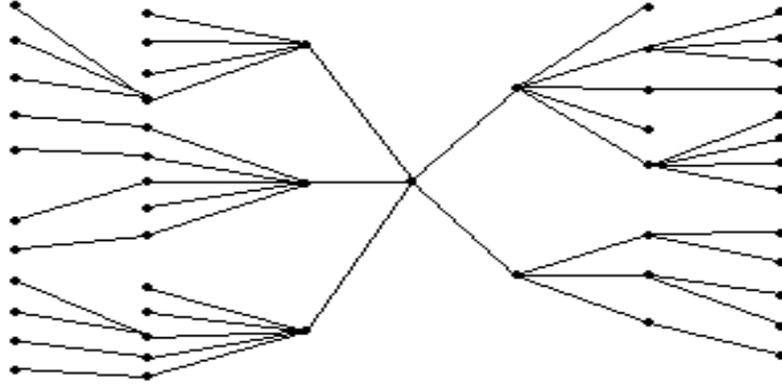


Figura 1.4: Grafo tipo árvore

(se o elo é fechado). Deste modo, dizemos que cada elo e da rede estará aberto ($\omega_e = 1$) com probabilidade p ou fechado ($\omega_e = 0$) com probabilidade $1 - p$, onde $0 \leq p \leq 1$. Além disso, assumimos que o estado de um elo não será afetado por quaisquer outros elos da rede obtendo, assim, o modelo de *percolação de elos independentes* no grafo G . Uma configuração deste modelo pode ser vista como um vetor com um número infinito de componentes, cada componente estando indexada por um elo da rede. Numa linguagem mais formal, uma configuração ω é um ponto do conjunto $\Omega = \{0, 1\}^E$, conhecido como *espaço de configurações*.

Um subconjunto de Ω determinado por um número finito de elos é chamado de *conjunto cilíndrico*. Então, um conjunto cilíndrico é da forma $C(\{\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_{e_i} = \sigma_{e_i} \forall i = 1, \dots, n\}$. Devido à independência entre os elos, podemos facilmente computar a probabilidade de ocorrência do conjunto cilíndrico $C(\{\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}\})$. Seja $|A_C|$ o número de elos abertos e $|F_C|$ o número de elos fechados de $\{\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}\}$ (equivalentemente, $|A_C|$ é igual ao número de σ 's iguais a 1 e $|F_C|$ é igual ao número de σ 's iguais a 0). Então:

$$P(C(\{\sigma_{e_1}, \dots, \sigma_{e_n}\})) = p^{|A_C|}(1 - p)^{|F_C|}.$$

Observe que a fórmula acima dá a probabilidade de ocorrência de um *conjunto de configurações* no gráfico G , seja ele finito ou não, enquanto que a fórmula (1.1), embora similar, dá a probabilidade de ocorrência de uma *configuração* em um grafo finito.

Dada uma configuração $\omega \in \Omega$ e um conjunto finito de índices $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$, ω e I geram um conjunto cilíndrico $C(\omega_I)$, definido por:

$$C(\omega_I) = \{\tilde{\omega} : \tilde{\omega}_i = \omega_i, \forall i \in I\} \quad (1.2)$$

Um caminho é dito *aberto* se todos os seus elos estão abertos. Dois sítios da rede, x e y , estão *conectados* ($x \longleftrightarrow y$) se existir um caminho aberto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $x_1 = x$ e $y_n = y$ (veja figura (1.2 -a)). Observe que, como qualquer caminho \mathcal{C} é um conjunto finito de elos, o conjunto de configurações $\{\mathcal{C} \text{ está aberto}\}$ é cilíndrico.

Em geral, um conjunto para o qual se pode definir um peso estatístico, ou probabilidade, é chamado de *evento*. Do que dissemos acima, um conjunto cilíndrico é um evento. Em geral podemos escrever um evento como a união ou interseção enumerável de conjuntos cilíndricos. Sem entrar na delicada construção rigorosa de um probabilidade em Ω , é natural considerarmos que se $A, B \in \Omega$, são eventos, o peso estatístico deles deve satisfazer as seguintes relações :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset;$$

$$P(A) \leq P(B) \text{ se } A \subset B;$$

Dado $\omega \in \Omega = [0, 1]^E$, definimos uma ordem parcial em Ω , como se segue:

$$\omega \leq \omega' \text{ se } \omega_e \leq \omega'_e, \quad \forall e \in E. \quad (1.3)$$

Definição 1.2 Dizemos que um evento A é crescente quando $\omega \in A$ e $\omega < \omega'$ implicar que $\omega' \in A$.

Em outras palavras, um evento A é crescente quando: *umentar o número de elos abertos de uma configuração é aumentar as chances de o evento ocorrer*. Se uma configuração faz com que o evento ocorra, ao acrescentarmos elos abertos a ela, o evento continua ocorrendo. Um evento é decrescente se seu complementar for crescente. Evento crescentes tem um papel fundamental em percolação. Um exemplo de evento crescente é $A = \{x \longleftrightarrow y\}$: dois sítios estarem conectados por um caminho de elos abertos.

Fixe um vértice x de G . O conjunto aleatório de vértices de G que contem todos os vértices conectados a x é chamado de *aglomerado aberto* de x e o denotamos $C(x)$. Representaremos por C o aglomerado aberto da origem (veja figura 1.2-b). O número de vértices de $C(x)$ será denotado por $|C(x)|$. Um outro exemplo de evento crescente é $A = \{|C| = \infty\}$, o aglomerado contendo a origem é infinito. Se para uma configuração ω os sítios x e y estão conectados e acrescentarmos um elo aberto a ω , os sítios continuarão conectados.

Seja A um conjunto de vértices de V . Chamamos de *fronteira* de A (e denotamos por ∂A) ao conjunto de vértices de A que são adjacentes ao complementar de A . Ou seja, $\partial A = \{v \in A; \exists \tilde{v} \in V(G), \|v - \tilde{v}\| = 1\}$

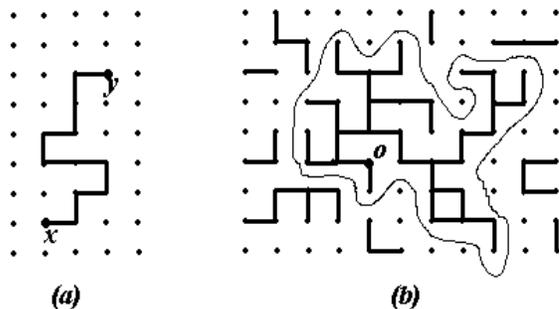


Figura 1.5: (a) Um caminho de elos abertos ligando x e y . (b) O aglomerado contendo a origem.

1.3 A rede hipercúbica

Primeiramente vamos desenvolver nosso estudo em um grafo infinito denominado de *rede hipercúbica* de dimensão d , denotada por $L^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$. Na notação que estamos utilizando, \mathbb{Z}^d representa o conjunto de sítios (ou vértices) e E^d representa o conjunto de elos (ou ligações) da rede. Mais especificamente, $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z} \forall i\}$ e $E^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : |x - y| = 1\}$, onde $|\cdot|$ é a função distância, definida na seção 1.2. Em resumo, cada sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ é indexado por d números inteiros, onde d é a dimensão espacial da rede, enquanto que um elo $e \in E^d$ é indexado por um par de sítios $x, y \in \mathbb{Z}^d$ da seguinte forma: $e = (x, y) = (y, x)$. Os sítios x e y são chamados de pontos terminais do elo e . A condição $|x - y| = 1$ significa que trataremos de um modelo de percolação de primeiros vizinhos (vide figura 1.3).

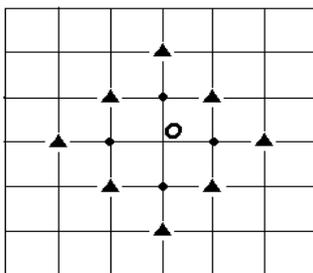


Figura 1.6: Os primeiros vizinhos (círculos) e os segundos vizinhos (triângulos) da origem em uma rede quadrada bidimensional segundo a métrica definida pela função distância $|x - y| = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$

Este grafo tem uma característica notável: ele é regular, no sentido em que não há nenhuma maneira intrínseca de distinguir seus vértices. Em particular, o peso estatístico definido sobre os conjuntos cilíndricos é invariante por translação, isto é, um cilindro definido por certas condições sobre os elos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ terá o mesmo peso que o cilindro definido pelas mesmas condições sobre uma translação $\{e_1 + z, e_2 + z, \dots, e_n + z\}$ dos elos originais. Isso significa que a origem nada tem de especial, isto é, podemos tomar qualquer sítio da nossa rede como a origem, conforme nossa comodidade. A rede hipercúbica é um grafo infinito, veremos na próxima seção que para obtermos resultados de algum interesse se faz necessária essa condição.

1.4 O problema da transição de fase em percolação

Definimos como *probabilidade de percolação* a probabilidade de um dado sítio da rede pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Como observamos na seção anterior, podemos tomar tal sítio como sendo a origem. Desse modo, definimos:

$$\theta(p) \equiv P_p(|C| = \infty). \quad (1.4)$$

Para mostrarmos essa definição faz sentido, isto é, que o conjunto de configurações

$$A = \{|C| = \infty\} = \{\text{o aglomerado da origem é infinito}\}$$

é realmente um evento (para podermos tomar seu peso estatístico), usaremos uma construção que será usada várias vezes ao longo dessas notas. Seja Λ_n a caixa quadrada $\{x \in \mathbb{Z}^d; |x| \leq n\}$ de todos os sítios que distam a menos que n da origem. É o que também chamamos de bola de raio n centrada na origem. Consideramos os conjuntos cilíndricos

$$A_n = \{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}.$$

Note que se o aglomerado da origem, C , é infinito então obrigatoriamente a origem passa por todas as fronteiras $\partial\Lambda_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Reciprocamente, se C é finito, existe uma caixa Λ_n suficientemente grande tal que $C \subset \Lambda_n$ e assim $0 \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n$. Provamos então que A é um evento pois pode ser expresso como a interseção de conjuntos cilíndricos:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Vamos descrever a seguir, de maneira heurística, o gráfico de θ como função de p . Primeiramente, observamos que $\theta(p)$ é uma função não decrescente de p . De fato, se aumentarmos

o valor de p (grosso modo, se "abrirmos mais elos" nas configurações que contribuem para um peso estatístico não nulo), então o evento $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ continuará ocorrendo, implicando que θ é não decrescente. Examinemos, agora, o comportamento do modelo quando p toma seus valores extremos: quando $p = 1$, todos os elos da rede estão abertos, de modo que todo sítio está conectado a qualquer outro. Em particular, a origem está conectada a um número infinito de outros sítios com probabilidade 1, ou seja, $\theta(p) = 1$; quando $p = 0$, não há elos abertos. Nenhum sítio está conectado a qualquer outro, e em particular, a origem está conectada a um número finito (neste caso zero) de outros sítios.

Na seção 1.5 vamos mostrar que, em qualquer dimensão espacial $d \geq 1$, se $p \approx 0$ então $\theta(p) = 0$. Também vamos mostrar que, se a dimensão espacial d é pelo menos 2 e se $p \approx 1$, então $\theta(p) \approx 1$. Então $\theta(p)$ é similar ao parâmetro de ordem em mecânica estatística e será através desta função que definiremos a *probabilidade crítica* (ou *ponto crítico*). Essa mudança no estado da rede, de possuir somente aglomerados finitos para o surgimento de um aglomerado infinito é o análogo geométrico de uma *transição de fase*, como quando a água passa de líquido para sólido a uma determinada temperatura e pressão. Conjectura-se [7] que o gráfico de θ versus p é da forma dada na figura 1.5 para $d \geq 2$.

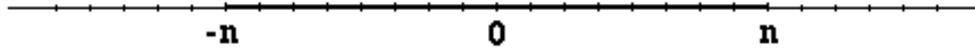


Figura 1.7: A rede \mathbb{Z} e os vértices n e $-n$.

Para $d = 1$, no entanto, não há transição de fase. Para qualquer valor $p < 1$, a probabilidade de percolação é nula. Observe a figura 1.4, vemos que para que o aglomerado da origem ser infinito, ele deve necessariamente passar, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo vértice n ou pelo vértice $-n$, em termos de conjuntos isso significa

$$\{0 \longleftrightarrow \infty\} \subset \{0 \longleftrightarrow n\} \cup \{0 \longleftrightarrow -n\} \quad (1.5)$$

Observando que, para que dois vértices em \mathbb{Z} estejam conectados é necessário e suficiente que os elos entre os vértices estejam abertos, podemos concluir que $P(\{0 \longleftrightarrow n\}) = p^n$ já que há n elos entre a origem e o vértice n . Da inclusão (1.5) obtemos então

$$P(\{0 \longleftrightarrow \infty\}) \leq P(\{0 \longleftrightarrow n\}) + P(\{0 \longleftrightarrow -n\}) = 2p^n$$

Como essa relação vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\theta(p) = P(\{0 \longleftrightarrow \infty\}) = 0$ para todo $p < 1$.

Voltamos agora ao modelo intuitivo da rocha da introdução. Em termos de grafos, a figura 1.1 e a equação (1.1) nos sugerem um grafo finito. Claramente não há transição de fase para um grafo finito pois é impossível existir um aglomerado infinito. Há, no entanto, uma razão mais profunda para o modelo finito não ser interessante, é que todas as funções que nos interessam ² são expressas em termos de soma de configurações, como só há um número finito de configurações, essas funções serão polinômios da variável p , portanto funções analíticas que não exibem comportamento brusco para pequenas variações da variável p .

1.5 Existência de transição de fase em dimensão $d \geq 2$

Em oposição à trivialidade do modelo de uma dimensão, o modelo de percolação em duas ou mais dimensões nos reserva um resultado não trivial³. Talvez, usando a sua intuição física, o leitor tenha pensado que aumentando a dimensão da rede, ou seja, a possibilidade de interconexões entre vértices da rede, a percolação passe a ocorrer para p menor que 1, embora ainda não ocorra para valores pequenos de p . E é exatamente isso que ocorre em dimensões a partir de 2. Na verdade existe um valor crítico, p_c , que separa essas duas fases. Vamos, então, provar rigorosamente o que discutimos acima:

Proposição 1.1 *Existem valores \underline{p} e \bar{p} , $0 < \underline{p} \leq \bar{p} < 1$, ambos dependentes da dimensão, tais que:*

1. $\theta(p) = 0$ para $d \geq 1$ e para $0 \leq p < \underline{p}$.
2. $\theta(p) > 0$ para $d \geq 2$ e para $\bar{p} < p < 1$.

De acordo com a proposição acima, é interessante definir a *probabilidade crítica* como o supremo de todos os valores de p para os quais $\theta(p) = 0$:

$$p_c \equiv \sup\{p : \theta(p) = 0\}. \tag{1.6}$$

²Em particular todas que iremos estudar nessas notas e que serão definidas nas próximas seções.

³Veja que retirar um ponto (abrir um elo) gera duas componentes conexas em $d = 1$, mas em $d \geq 2$ não.

Como já discutimos, p_c é função da dimensão, isto é, $p_c = p_c(d)$. É evidente que $p_c(1) = 1$. Segue da proposição acima que $p_c(d)$ é um número estritamente maior que 0 e estritamente menor que 1. Como corolário da proposição, temos o seguinte teorema que resume matematicamente o fenômeno de transição de fase em percolação:

Teorema 1.1 *Para qualquer dimensão $d \geq 2$, existe um valor crítico p_c do parâmetro, chamado ponto crítico, estritamente entre 0 e 1, isto é, $0 < p_c < 1$, tal que*

1. $\theta(p) = 0$ se $0 \leq p < p_c$.
2. $\theta(p) > 0$ se $p_c < p \leq 1$.

Chamaremos de *fase subcrítica* o intervalo $0 \leq p < p_c$ e de *fase supercrítica* ao intervalo $1 \geq p > p_c$. O ponto $p = p_c$ é chamado de *ponto crítico* e o comportamento do sistema na vizinhança deste ponto é bem interessante. A função θ funciona como um parâmetro de ordem: exceto pelo ponto crítico, se $\theta = 0$ estaremos na fase subcrítica e se $\theta > 0$ estaremos na fase supercrítica. Embora seja conhecido que $\theta(p_c) = 0$ em $d = 2$ e $d \geq 19$, não se sabe se o mesmo é verdade para $2 < d < 19$ (no entanto seria uma grande surpresa se alguém provasse que $\theta(p_c) > 0$ para $2 < d < 19$). Veja na Figura 1.5 um esboço do que esperaríamos que fosse o gráfico da função $\theta(p)$.

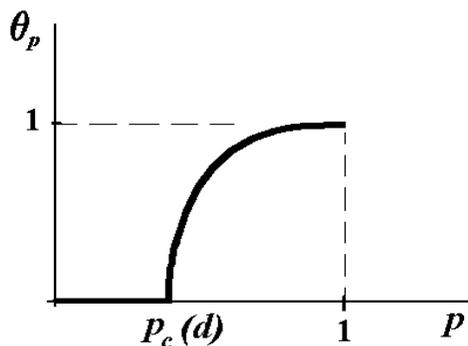


Figura 1.8: Conjectura do gráfico de $\theta(p) \times p$ para $d \geq 2$.

Prova da primeira parte da proposição 1.1:

Consideremos uma "caixa" hipercúbica, de lado $2n$, dada por:

$$\Lambda_n = [-n, n]^d = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq n, \forall i\}.$$

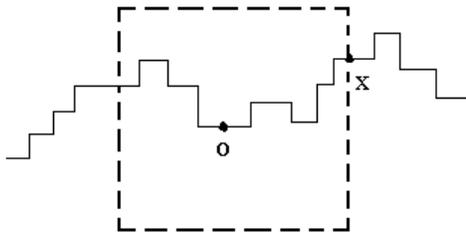


Figura 1.9: Caixa Λ_n , onde x está na fronteira da caixa.

Então podemos afirmar que o conjunto das configurações nas quais a origem está conectada à fronteira da caixa contém o conjunto das configurações em que a origem se conecta ao infinito:

$$\{\omega \in |C| = \infty\} = \{\omega : o \longleftrightarrow \infty\} \subset \{\omega : o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}, \forall n. \quad (1.7)$$

Denotaremos por $|\partial\Lambda_n|$ a área da fronteira da caixa centrada na origem e de lado $2n$ (isto é, $|\partial\Lambda_n|$ denota o número de sítios que estão na superfície de Λ_n). Considerando-se apenas caminhos sem circuitos ⁴ temos de (1.7):

$$\theta(p) \leq P(\{\omega : o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}). \quad (1.8)$$

Precisamos agora contar, ou pelo menos estimar, a probabilidade dos caminhos possíveis que ligam a origem à fronteira da "caixa". O número de caminhos sem circuitos de comprimento $|\omega|$ que liga a origem à fronteira da caixa é no máximo $|\partial\Lambda_n|2d(2d-1)^{|\omega|-1}$, pois o primeiro passo do caminho tem $2d$ possíveis sítios de destino, cada um dos passos seguintes, até atingirmos a fronteira, tem no máximo $2d-1$ opções possíveis devido à ausência de circuitos e, finalmente, podemos alcançar a fronteira de Λ_n em $|\partial\Lambda_n|$ pontos distintos. Como cada passo, isto é, cada elo aberto, ocorre com probabilidade p , temos, de (1.8):

$$P(\{\omega : o \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}) \leq \sum_{|\omega| \geq n} |\partial\Lambda_n|2d(2d-1)^{|\omega|-1}p^{|\omega|}, \quad (1.9)$$

⁴A rigor poderíamos dizer caminho, pois por sua definição da seção 1.2 um caminho nunca contém circuitos. Usamos essa expressão porque eles são um objeto de estudo muito ativo em probabilidade, são os chamados *passeios auto-evitentes*.

Reescrevemos o segundo membro da desigualdade como::

$$\sum_{|\omega| \geq n} |\partial\Lambda_n| 2d(2d-1)^{|\omega|-1} p^{|\omega|} = \frac{2d|\partial\Lambda_n|}{2d-1} \sum_{k \geq n} (2d-1)^k p^k. \quad (1.10)$$

Mas:

$$\frac{1}{2d-1} \sum_{k \geq n} (2d-1)^k p^k = \frac{[(2d-1)p]^n}{2d-1} \frac{1}{1-(2d-1)p}, \quad \text{se } (2d-1)p < 1. \quad (1.11)$$

Então, substituindo (1.11) em (1.10), conseguimos uma cota superior para o segundo termo da desigualdade (1.9):

$$2d|\partial\Lambda_n| \frac{[(2d-1)p]^n}{2d-1} \frac{1}{1-(2d-1)p} \leq \frac{2dC_d}{1-(2d-1)p} n^{d-1} [(2d-1)p]^n,$$

Na desigualdade anterior, usamos que $|\partial\Lambda_n|$ pode ser cotada superiormente pela área de uma hipersfera centrada na origem e de raio $2n$, i.e., $|\partial\Lambda_n| \leq C_d n^{d-1}$. Assim, o termo à direita da desigualdade anterior vai a zero quando $n \rightarrow \infty$ se $(2d-1)p < 1$. Como o argumento acima vale $\forall n$, temos que, se $0 \leq p < 1/(2d-1)$, então $\theta(p) = 0$. \square

Para provarmos a segunda parte da proposição teremos que usar o seguinte resultado:

Proposição 1.2 $\theta(p, d)$ é uma função não-decrescente da dimensão d .

Prova: Podemos construir o modelo de percolação em d dimensões em um hiperplano d -dimensional da rede $(d+1)$ -dimensional contendo a origem. Para tanto, “desligamos” (declaramos fechados) os elos ligando o hiperplano ao resto do espaço. Chamaremos de C' ao aglomerado da origem neste modelo (veja a figura 7). é fácil ver que $C' \subset C$ e assim:

$$\theta(p, d) = P_{p, d+1}(|C'| = \infty) \leq P_{p, d+1}(|C| = \infty) = \theta(p, d+1). \quad (1.12)$$

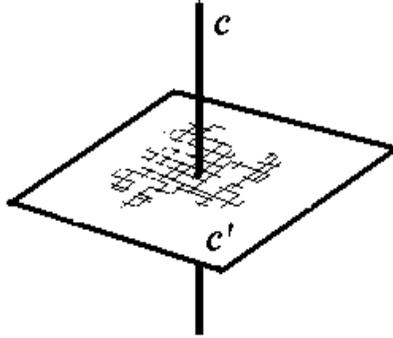


Figura 1.10: O aglomerado C' equivale ao aglomerado C em dimensão $d + 1$.

Prova da segunda parte da proposição 1.1: Segue da proposição 1.2 que, para provarmos a segunda afirmação da proposição 1.1, é suficiente prová-la para $d = 2$. Além disto, como $\theta(p) = 1 - P(|C| < \infty)$, é suficiente mostrar que existe um valor \bar{p} , estritamente positivo, tal que $P(|C| < \infty) < 1$ para todo p maior que \bar{p} e menor que 1.

Utilizaremos a seguir um argumento semelhante ao chamado "argumento de Peierls" da mecânica estatística [7]. Trabalharemos na rede dual de \mathbb{Z}^2 , $\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$. Da figura 1.5 é fácil ver que podemos associar cada elo da rede \mathbb{Z}^2 a um elo correspondente na rede dual, em uma relação 1 a 1.

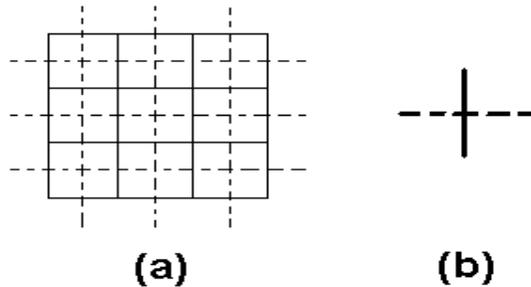


Figura 1.11: (a) Em pontilhado, a rede dual da rede quadrada \mathbb{Z}^2 . (b) Um elo da rede, em traço contínuo, e seu dual em traço pontilhado

Vamos definir um modelo de percolação na rede dual \mathbb{Z}_*^2 , baseado no modelo em \mathbb{Z}^2 , declarando os elos e_{i*} da rede dual abertos (com probabilidade p) ou fechados (com probabilidade $1 - p$) conforme os e_i 's estejam abertos ou fechados. Notemos que a existência de um circuito γ de elos fechados na rede dual ao redor da origem está relacionada com a existência de um aglomerado finito de elos abertos contendo a origem em \mathbb{Z}^2 . Este fato

Observação Em especial, a prova da proposição 1.1 nos fornece cotas superiores e inferiores para p_c , dependentes da dimensão⁶, dadas por:

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) \leq \bar{p}.$$

⁶Kesten mostrou que $p_c(d) \sim \frac{1}{2d}$ para dimensões grandes. Veja [14].

Capítulo 2

Caracterização da Fase Subcrítica

2.1 Decaimento exponencial da função conectividade

Definição 2.1 *A função conectividade entre os vértices x e y é definida como a probabilidade de haver um caminho de elos abertos conectando estes pontos, isto é,*

$$\tau_{xy} \equiv P\{x \longleftrightarrow y\} \quad (2.1)$$

É intuitivo imaginar que quanto mais distantes dois vértices estão, menor é a probabilidade de eles estarem conectados, mas será que essa probabilidade tende a zero quando a distância entre os dois vértices tende a infinito? Provaremos inicialmente que τ_{xy} decai para zero exponencialmente com a distância de x a y se $d = 1$ e $0 \leq p < 1$. A seguir provaremos que, em qualquer dimensão e para qualquer valor de p entre 0 e 1, se a conectividade decair para zero com a distância, então este decaimento não pode ser mais rápido do que exponencial. Finalmente provaremos que a conectividade decai pelo menos exponencialmente em qualquer dimensão e para $p < \underline{p}$, onde $\underline{p} = \frac{1}{2d}$. A partir deste resultado estaremos aptos a definir a susceptibilidade e então estudar a fase subcrítica.

2.1.1 Cálculo de τ_{xy} em dimensão $d = 1$

Para a dimensão $d = 1$ e $p > 0$, já foi observado na seção 1.4 que

$$\tau_{xy} = p^{|x-y|} = e^{-(\ln \frac{1}{p})|x-y|}. \quad (2.2)$$

Notando que $0 < \ln \frac{1}{p} < \infty$ para valores $0 < p < 1$ e observando que a conectividade se anula para $p = 0$, é fácil concluir que a conectividade decai exponencialmente $\forall p$ no intervalo $0 \leq p < 1$.

2.1.2 Decaimento exponencial de τ_{xy} em dimensão $d \geq 1$

Primeiro mostraremos que a conectividade não pode decair a uma taxa mais rápida que exponencial. Para isto, precisaremos da desigualdade FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre). Essa desigualdade na realidade vale em situações muito mais gerais e para modelos da mecânica estatística na rede. A forma da desigualdade que enunciaremos foi provada por Harris em 1960 bem antes da demonstração em contextos mais gerais pelos três autores que lhe deram o nome.

Teorema 2.1 Desigualdade FKG *Se A e B forem eventos crescentes, então:*

$$P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$$

Escolhendo um dos caminhos de tamanho mínimo que conecte x a y denotado por $\{x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = y\}$. Observe que o evento $\{x_i \longleftrightarrow x_{i+1}\}$ é crescente e uma aplicação direta de FKG nos fornece

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = P(x \longleftrightarrow y) &\geq P(x \longleftrightarrow x_1 \text{ e } x_1 \longleftrightarrow x_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_{n-1} \longleftrightarrow y) \\ &\geq \prod_{i=0}^{n-1} P(x_i \longleftrightarrow x_{i+1}) \geq p^n = p^{|x-y|} = e^{-(\ln \frac{1}{p})|x-y|}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para valores de p no intervalo $0 < p < 1$ concluímos que, se τ_{xy} decai para zero com a distância $|x - y|$, então o decaimento é no máximo exponencial. Dessa forma, só nos resta provar que a conectividade de fato decai e, para isto, será necessário exigir que p seja pequeno.

Sejam x_1, x_2, \dots, x_{2d} os $2d$ primeiros vizinhos de x . Então:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = P\{(x \longleftrightarrow x_1 \text{ e } x_1 \longleftrightarrow y) \text{ ou } \dots \text{ ou } (x \longleftrightarrow x_{2d} \text{ e } x_{2d} \longleftrightarrow y)\} &\leq \\ \sum_{i=1}^{2d} P(x \longleftrightarrow x_i \text{ e } x_i \longleftrightarrow y) &\leq p \sum_{i=1}^{2d} P(x_i \longleftrightarrow y) \leq p(2d)P(x_{mx} \longleftrightarrow y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde, na penúltima desigualdade, usamos a desigualdade de Simon-Lieb (veja teorema (2.6)). Acima, x_{mx} corresponde ao vizinho de x para o qual a probabilidade $P(x_i \longleftrightarrow y)$ é máxima. Aplicando a desigualdade iterativamente, vem que $\tau_{xy} \leq (2pd)^{|x-y|}$ e daí, concluímos que τ_{xy} decai exponencialmente se $2dp < 1$. Resumindo os resultados acima na forma de um teorema, temos:

Teorema 2.2 *Suponha que $0 < p < 1/2d$. Então existem constantes estritamente positivas $\overline{m} = \overline{m}(d, p)$ e $\underline{m} = \underline{m}(d, p)$ tais que:*

$$\exp(-\overline{m}|x - y|) \leq \tau_{xy} \leq \exp(-\underline{m}|x - y|). \quad (2.5)$$

Designando por n o vértice localizado em um dos eixos coordenados e comprimento n , podemos expressar a equação (2.2) como

$$\underline{m} \leq -\frac{\ln \tau_{0n}}{n} \leq \overline{m} \quad (2.6)$$

e as cotas exponenciais que obtivemos foram $\underline{m} = \ln(1/p)$; $\overline{m} = \ln(1/2dp)$. O seguinte teorema mostra o comportamento da quantidade acima.

Proposição 2.1 *O seguinte limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln \tau_{0n}}{n} \right] \quad (2.7)$$

existe e é não negativo para todo $0 < p < 1$.

Prova: Por invariância translacional, podemos considerar o caso em que y está a origem, $|x - y| = |x|$. Considere que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln \tau_{0n}}{n} \right) \equiv m(p)$, e $m(p) \geq 0 \quad \forall 0 < p < 1$. Note que esse limite $m(p)$ não depende do ixo coordenado em que n está. Para provarmos a existência do limite acima, lembramos que, devido à invariância translacional:

$$\tau_{0n} \geq \tau_{0m} \cdot \tau_{mn} = \tau_{0m} \tau_{0(n-m)}$$

que é equivalente a:

$$-\ln \tau_{0n} \leq -\ln \tau_{0m} - \ln \tau_{0(n-m)}$$

Uma sequência com a propriedade acima é chamada de sub-aditiva. É um fato geral que se $\{a_m\}$ é uma sequência subaditiva então o seguinte limite existe, provando o teorema.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m}. \quad (2.8)$$

□

Como existe o limite $-\ln \tau_{0n}/n$, o teorema 2.2 nos diz que $m(p) > 0 \forall p < 1/2d$. Esse resultado não é ótimo. Na seção seguinte entaremos estender o intervalo em que a massa é estritamente positiva.

2.2 Caracterização da fase subcrítica

Por enquanto estivemos interessados em saber se há ou não uma probabilidade positiva de o aglomerado aberto da origem ser infinito. Agora vamos tentar ver uma abordagem um pouco diferente. Queremos saber qual é, dependendo do parâmetro p , a *média estatística* (ou *esperança matemática*) do tamanho do aglomerado da origem. Buscamos ainda uma relação entre essa média e a função de conectividade e também com a probabilidade de percolação.

Definição 2.2 *Definimos a susceptibilidade do modelo, denotada $\chi(p)$, como sendo o valor esperado do tamanho do aglomerado aberto contendo a origem:*

$$\chi(p) = E_p|C| = \infty \cdot P(|C| = \infty) + \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(|C| = n) \quad (2.9)$$

Podemos usar alternativamente a caracterização:

$$\chi(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \tau_{ox} \quad (2.10)$$

Segue da seção 2.1 que, se $p < \frac{1}{2d}$ então $\chi < \infty$. Mas também pela equação ((2.9) $\chi(p) = \infty$ se $p > p_c$. Faz sentido, então, definirmos um outro ponto crítico para o modelo, o valor do parâmetro para o qual a esperança do tamanho do aglomerado se torna infinita.

Definição 2.3 *Existe um valor crítico π_c tal que:*

$$\pi_c \equiv \sup\{p : \chi(p) < \infty\} \quad (2.11)$$

Como acontecia para $\theta(p_c)$, não sabemos a princípio quanto vale $\chi(\pi_c)$. Dos comentários acima, vem que $\pi_c \leq p_c < 1$. A região onde o parâmetro p é menor do que π_c pode ser também chamada de *fase subcrítica*. Ao contrário das aparências, não há uma contradição entre essa definição e o uso dessa expressão que fazíamos anteriormente. Um resultado fundamental muito celebrado em percolação é a chamada unicidade do ponto crítico. A demonstração desse resultado é difícil e não será feita nessas notas

Teorema 2.3 (Unicidade do ponto crítico) *Seja π_c definido em (2.9) p_c definido em (1.6), então vale:*

$$\pi_c = p_c$$

O resultado preciso que iremos provar, no entanto, é

Teorema 2.4 τ_{xy} *decai exponencialmente* $\iff \chi(p) < \infty$.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos enunciar, sem provas, um teorema de fundamental importância em percolação.

Sejam dois eventos crescentes A e B dependentes apenas de um número finito de elos (eventos cilíndricos). A e B então ocorrem disjuntamente, ora para uma dada configuração ω , se existirem dois caminhos bertos disjuntos em ω , tais que o primeiro garanta a ocorrência de A e o segundo garanta a ocorrência de B . A essa ocorrência disjunta de A e B denotamos $A \circ B$. Mais formalmente (lembrando da notação estabelecida em (1.2)), temos :

Definição 2.4 (Ocorrência disjunta) *Para dados eventos $A, B \subseteq \Omega$:*

$$A \circ B = \{\omega \in \Omega / \exists I = I(\omega) \subset \{1, 2, \dots, m\} \text{ tal que } C(\omega_I) \subset A \text{ e } C(\omega_{I^c}) \subset B\} \quad (2.12)$$

Teorema 2.5 (Desigualdade BK) *Se A e B são ambos eventos crescentes ou decrescentes, então vale a seguinte desigualdade¹:*

$$P(A \circ B) \leq P(A)P(B) \quad (2.13)$$

¹Van den Berg e Kesten conjecturaram que a desigualdade valia também no caso geral. Este resultado foi provado em 1997 por Reimer (veja [11])

Podemos observar que a desigualdade de BK é complementar à desigualdade FKG, pois enquanto uma fornece uma cota superior, a outra fornece uma cota inferior para $P(A) \cdot P(B)$. Uma consequência imediata, mas de grande importância, da desigualdade de BK, é a chamada desigualdade de Simon-Lieb².

Teorema 2.6 (Desigualdade SL) *Seja Λ uma caixa quadrada contendo a origem, e x um vértice a fronteira $\partial\Lambda$ da caixa. Então:*

$$\tau_{oy} \leq \sum_{x \in \partial\Lambda} \tau_{ox}^\Lambda \tau_{xy} \quad (2.14)$$

Usamos, no teorema acima, a notação

$$\tau_{xy}^\Lambda = P\{x \longleftrightarrow y \text{ usando somente elos dentro da caixa } \Lambda\}. \quad (2.15)$$

Prova do teorema (2.4): Se $\chi(p) < \infty$, podemos fixar n suficientemente grande de modo que:

$$\eta \equiv \sum_{x:|x|=n} \tau_{ox} < 1 \quad (2.16)$$

Seja $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d; |x| = n\}$. Tomando x, y tais ue $|x - y| > n$ e aplicando a Desigualdade de Simon-Lieb:

$$\tau_{xy} \leq \sum_{u \in \partial\Lambda_n} \tau_{xu}^{\Lambda_n} \tau_{vy} \leq \left(\sum_{u \in \partial\Lambda_n} \tau_{xu} \right) \tau_{vx}^{\max}. \quad (2.17)$$

Seja L_n a parte inteira de $|x - y|/n$. Aplicando a desigualdade e Simon-Lieb iterativamente, obtemos a cota superior:

$$\tau_{xy} \leq \eta^{\frac{|x-y|}{L_n}} = e^{-\left(\frac{1}{L_n} \ln \frac{1}{\eta}\right) |x-y|}. \quad (2.18)$$

²A desigualdade e Simon-Lieb vale em contextos mais gerais da mecânica estatística e não depende da desigualdade BK, esta sendo exclusiva da percolação.

Reciprocamente se a conectividade decai exponencialmente, $\tau_{xy}(p) \leq \exp(-m(p)|x - y|)$, com $p > 0$, concluímos de (2.10)

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_n \sum_{x:|x|=n} \tau_{ox} \leq \sum_n e^{-m(p)n} |\partial\Lambda_n| \\ &\leq C_d \sum_{n \geq 0} n^{d-1} e^{-m(p)n} < \infty \end{aligned} \quad (2.19)$$

□

Resta-nos ainda entender como a conectividade se comporta exatamente o ponto crítico π_c

Teorema 2.7 *No ponto crítico π_c temos*

$$m(\pi_c) = 0 \quad (2.20)$$

Ou, equivalentemente,

$$\chi(\pi_c) = \infty \quad (2.21)$$

Prova: Suponha, por contradição, que $m(\pi_c) > 0$. Assim, $\tau_{ox}(\pi_c)$ decai exponencialmente e pelo teorema 2.4 teríamos $\chi(\pi_c) < \infty$. Como na demonstração daquele teorema, existiria uma caixa Λ_n suficientemente grande para que

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{ox}(\pi_c) < 1, \quad (2.22)$$

e como $\tau_{xu}^{\Lambda_n} \leq \tau_{xu}$, vem que:

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{ox}^{\Lambda}(\pi_c) < 1. \quad (2.23)$$

Portanto, por continuidade, para p próximo, e maior que π_c , também valeria

$$\sum_{x \in \partial\Lambda_n} \tau_{ox}^{\Lambda_n}(p) < 1. \quad (2.24)$$

Agora, aplicando Simon-Lieb e usando o resultado anterior:

$$\tau_{ox}(p) \leq \sum_{u \in \Lambda_n} \tau_{0u}^{\Lambda_n}(p) \tau_{uy}(p) \quad (2.25)$$

Iterando o processo, obtemos que $\tau_{xy}(p)$ decai exponencialmente para algum $p > \pi_c$. Isto implicaria que $\chi(p) < \infty$, o que é uma contradição.

□

Observação: Segue do teorema acima que, caso a função conectividade, quando calculada no ponto π_c , decaia para zero com a distância, então este decaimento não pode ser exponencial. Supondo que decaia polinomialmente e da forma:

$$\tau_{0x} \approx \frac{1}{|x|^{\eta+d-2}},$$

então podemos concluir que $\eta \leq 1$.

Uma consequência interessante dos resultados acima é o

Teorema 2.8 $\theta(p)$ é uma função contínua à direita em todo o intervalo $[0, 1]$.

Prova: Seja $\theta_n(p) = P(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)$. Notamos que

1. $\theta_n(p)$ é contínua em todo o intervalo $[0, 1]$ como observado no último parágrafo da seção 1.3
2. $\theta_n(p)$ é uma sequência decrescente de funções.
3. Para cada n fixo, $\theta_n(p)$ é crescente em p .
4. para todo $p \in [0, 1]$, $\theta(p) \leq \theta_n(p)$ e ainda mais, $\theta(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(p)$.

Concluimos que $\theta(p)$ é decrescente em p pois $\theta(p) \leq \theta_n(p) \leq \theta_n(r)$ para $p < r$, tomando o limite temos $\theta(p) \leq \theta(r)$. Considere uma sequência p_n convergindo para p_0 pela direita, $p_n \searrow p_0$. Como $\theta(p)$ é decrescente, $\theta(p_n)$ é uma sequência decrescente cotada inferiormente por $\theta(p_0)$, logo $\theta(p_n)$ converge para algum valor θ_0 . Queremos agora mostrar que $\theta(p_0) = \theta_0$. Por um lado, é claro que $\theta(p_0) \leq \theta_0$ e se $\theta(p_0) < \theta_0$ poderíamos encontrar um n suficientemente grande de modo que $\theta(p_0) < \theta_n(p_0) < \theta_0$, pois $\theta_n(p_0) \rightarrow \theta(p_0)$ e um m suficientemente grande para que $\theta_n(p_0) < \theta_n(p_m) < \theta_0$ pois $p_m \rightarrow p_0$. Esse é a contradição que procurávamos. □

Capítulo 3

Comportamento Crítico numa Rede de Bethe

3.1 Redes de Bethe

Nas seções anteriores, mostramos que o fenômeno de transição de fase acontece na rede hipercúbica mas nem abordamos o problema de saber *como* acontece essa transição. Esse problema é bastante difícil de ser abordado naquela rede e isso se deve essencialmente ao fato de que naquele grafo há várias (aliás, infinitas) maneiras de se atingir um vértice a partir de um vértice fixo. Para contornar esse problema, estudaremos nas próximas seções o modelo de percolação em um grafo onde não haja esse problema. Esses grafos, como vimos na seção 1.2 são as *árvores*. Nossa esperança é que nesses grafos consigamos respostas bastante precisas e que essas respostas nos forneçam dicas de como o modelo de percolação na rede hipercúbica se comporta perto do ponto crítico.

Definição 3.1 *Uma rede de Bethe com número de coordenação r é um grafo tipo árvore onde cada vértice tem número de incidência r exceto por um, chamado de origem, cujo número de incidência é $r - 1$.*

Observamos que a rede de Bethe com $r = 2$ é exatamente a (parte com coordenadas positivas da) rede hipercúbica com $d = 1$. Logo, ela não apresenta transição de fase e não é interessante para o que queremos estudar. Vamos usar o símbolo \mathcal{B}_r para representar o conjunto de vértices de uma rede de Bethe com número de coordenação r . Na figura 3.1

mostramos uma rede de Bethe com $r = 3$. De cada sítio de \mathcal{B}_3 emergem 3 elos exceto por um sítio, de onde emanam somente dois elos.

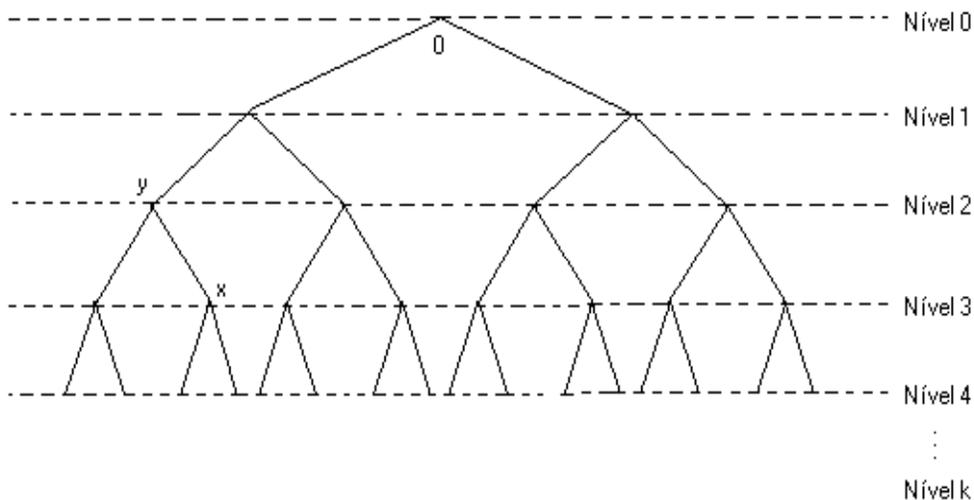


Figura 3.1: Níveis na rede de Bethe ($r = 3$)

Definição 3.2 Chamamos de nível de um vértice $x \in \mathcal{B}_r$ ao número inteiro não negativo $k(x)$ que fornece a distância, como definida na seção 1.2, entre x e a origem 0 da rede.

Na figura 3.1, x está no nível 3 enquanto que y está no nível 2.

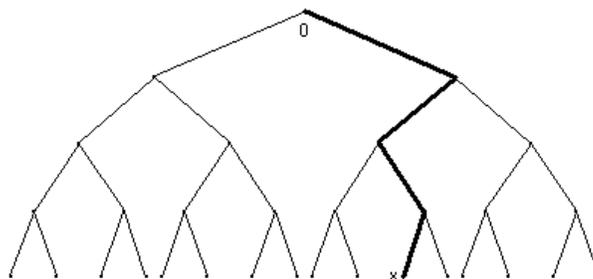


Figura 3.2:

Um sítio x é indexado pelo seu nível $k(x)$ e pela sua história: $(l_1, l_2, \dots, l_{k(x)})$, onde $1 \leq l_i \leq r - 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, k(x)$. Por exemplo, o sítio x da figura 3.1 é indexado

pela tripla $(1, 1, 2)$ enquanto que o sítio y é indexado pela dupla $(1, 1)$. Observe que, se x e y são vizinhos próximos, então:

$$k(x) = k(y) \pm 1 \quad (3.1)$$

Supondo $k(x) = k(y) + 1$, podemos afirmar que $l_i(x) = l_i(y) \forall 1 \leq i \leq k(y)$. No caso da figura 3.1: $y = (1, 1)$ $x = (1, 1, 2)$. Observe que: $l_1(x) = l_1(y) = 1, l_2(x) = l_2(y) = 1$

A seguir, vamos mostrar que uma rede de Bethe não representa uma região bem comportada no espaço. Veremos que sua fronteira é da mesma ordem de grandeza que o seu volume. Observe que este não é o caso, por exemplo, de uma região cúbica d -dimensional. Consideremos neste caso o volume $|B(L)|$ da bola de raio L e centro na origem, ou seja, de todos os vértices cuja distância até a origem é menor do que L . É fácil ver que $|B(L)|$ é da ordem L^d enquanto que a sua área superficial $|\partial B(L)|$ é da ordem L^{d-1} , de modo que $|B(L)|/|\partial B(L)| \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$.

Na rede de Bethe, $B(L)$ corresponde aos vértices localizados até o nível L e $\partial B(L)$ corresponde exatamente aos vértices localizados no nível L . Observando a figura 3.1 podemos facilmente imaginar (para todo $r \geq 3$) a quantidade de sítios por nível na rede de Bethe:

nível 0: 1 sítio.

nível 1: $(r - 1)$ sítios.

nível 2: $(r - 1)^2$ sítios.

nível 3: $(r - 1)^3$ sítios.

Deduzimos que

nível k: $(r - 1)^k$ sítios.

Podemos fazer a dedução acima por indução matemática. Sabemos que no nível zero só há a origem, logo um só vértice. E ainda, se no nível k há $(r - 1)^k$ vértices, e de cada vértice emanam $r - 1$ vértices no seguinte nível, podemos concluir que no nível $k + 1$ há $(r - 1)^{k+1}$ vértices.

Logo, o número de sítios localizados até o nível k de uma rede de Bethe com número de coordenação $r \geq 3$ é dado por:

$$\sum_{i=0}^k (r - 1)^i = 1 + (r - 1) + (r - 1)^2 + \dots + (r - 1)^k = \frac{(r - 1)^{k+1} - 1}{r - 2}, \quad (3.2)$$

isto é:

$$|B(L)| = \frac{(r-1)^{L+1} - 1}{r-2}. \quad (3.3)$$

Analogamente, a área da superfície de $|\partial B(L)|$ é dada pelo número de sítios no nível L , isto é:

$$|\partial B(L)| = (r-1)^L. \quad (3.4)$$

Vamos agora analisar a razão entre a área e o volume:

$$\frac{|\partial B(L)|}{|B(L)|} = \frac{(r-2)}{(r-1)} \frac{(r-1)^{L+1}}{(r-1)^{L+1} - 1} \implies \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\partial B(L)|}{|B(L)|} = \frac{(r-2)}{(r-1)} \neq 0 \quad (3.5)$$

A partir da equação (3.5) podemos concluir que em uma rede de Bethe com número de coordenação $r \geq 3$, a fronteira $|\partial B(L)|$ cresce com a mesma taxa com que cresce o volume $|B(L)|$ quando $L \rightarrow \infty$.

3.2 Cálculo das funções termodinâmicas

As funções $\theta(p)$, $\tau_{xy}(p)$ e $\chi(p)$, como definidas nas seções 1.4, 2.1 e 2.2, são às vezes chamadas de *funções termodinâmicas* pela similaridade que têm com certas funções da mecânica estatística do equilíbrio, magnetização espontânea, função correlação e susceptibilidade magnética respectivamente [15, 16]. Na rede hipercúbica, é impossível obter uma expressão analítica para essas funções. Por exemplo, para calcular o valor de $\tau_{xy}(p)$ seria necessário somar sobre todos caminhos abertos que conectam x a y . Mesmo se conseguíssemos fazê-lo, teríamos o problema das interseções entre caminhos, o que tornaria definitivamente inviável efetuar a soma. Nossa esperança é que em uma rede de Bethe, onde há sempre um único caminho ligando dois vértices, tenhamos a possibilidade de obter expressões bastante razoáveis para as funções termodinâmicas. Nesta e na próxima seção vamos obter os seguintes resultados

1. A função conectividade $\tau_{xy}(p)$, como função da distância entre x e y , decai exponencialmente para todo valor do parâmetro p ;
2. A susceptibilidade $\chi(p)$ é finita se $p < p_c$ e é infinita se $p > p_c$.
3. Há transição de fase, isto é, existe um valor $0 < p_c < 1$, abaixo do qual θ é nulo e acima do qual θ é positivo;
4. p_c é exatamente igual a $1/(r - 1)$;

Veremos que, enquanto a conectividade e a susceptibilidade podem ser determinadas explicitamente, a probabilidade de percolação será determinada implicitamente. Começemos calculando a conectividade

Teorema 3.1 *A probabilidade de um vértice x estar conectado à origem é*

$$P\{0 \longleftrightarrow x\} = p^{k(x)} \quad (3.6)$$

independentemente do sítio x . Em geral, a probabilidade de dois sítios estarem conectados é

$$P\{x \longleftrightarrow y\} = p^{|x-y|}. \quad (3.7)$$

Prova: Primeiro notamos que a afirmação (3.6) é um caso particular de (3.7), logo basta provarmos esta última. Como sabemos, há um único caminho \mathcal{C}_{xy} conectando x e y (veja a figura 3.2). Se este caminho \mathcal{C}_{xy} estiver aberto os dois sítios estarão conectados e, reciprocamente, se os dois elos estão conectados seguramente o caminho \mathcal{C}_{xy} está aberto. Assim

$$\tau_{xy} = P\{\mathcal{C}_{xy} \text{ está aberto}\} \quad (3.8)$$

O caminho \mathcal{C}_{xy} é formado exatamente por $|x - y|$ elos. Como os elos são independentes, obtemos

$$P\{\mathcal{C}_{xy} \text{ está aberto}\} = p^{|x-y|} \quad (3.9)$$

Concluimos assim a demonstração. É interessante notar que os elos que não estão em \mathcal{C}_{xy} podem estar abertos ou fechado indiferentemente sem afetar a conexão entre x e y . É importante também notar que esse resultado é válido para qualquer valor do parâmetro p . \square

Proposição 3.1

$$\theta(p) = 0 \quad \forall \quad p < \frac{1}{r-1}. \quad (3.10)$$

Prova: Seja $n \geq 1$ um número inteiro arbitrário fixo. Para que o aglomerado da origem seja infinito, é necessário que o origem esteja conectada a algum sítio no nível n , ou seja,

$$\{|C| = \infty\} \subset \cup_{\{x: l_x=n\}} \{0 \mapsto x\},$$

então, pelo teorema 3.1 e pelas inclusões acima, temos que

$$\theta(p) = P\{|C| = \infty\} \leq \sum_{\{x: l_x=n\}} P\{0 \mapsto x\} = (r-1)^n p^n. \quad (3.11)$$

Supondo que $p < 1/(r-1)$ e tomando o limite $n \rightarrow \infty$, obtemos o resultado. \square

A proposição 3.1 implica que $p_c \geq \frac{1}{r-1}$. Posteriormente vamos mostrar que $p_c = \frac{1}{r-1}$ mas desde já vamos usar esse fato. Se o leitor ficar com a impressão de que isso pode alterar a seqüência lógica, interprete este valor de p_c meramente como um símbolo até demonstrarmos sua veracidade.

A susceptibilidade $\chi(p)$ pode ser explicitamente calculada:

Proposição 3.2

$$\chi(p) = (p_c - p)^{-1} \quad \text{se } p < p_c. \quad (3.12)$$

Prova: Da definição da susceptibilidade e da proposição 3.1, temos que:

$$\begin{aligned} \chi(p) &= \sum_{x \in \mathcal{B}_r} \tau_{0x} = \\ \sum_{x \in \mathcal{B}_r} p^{k(x)} &= \sum_{l \geq 0} (r-1)^l p^l = \sum_{l \geq 0} \left(\frac{p}{p_c}\right)^l = \frac{1}{p_c - p} < \infty \quad \text{se } p < p_c. \end{aligned} \quad (3.13)$$

\square

3.3 $p_c = \frac{1}{r-1}$ para percolação em \mathcal{B}_r

Vamos agora analisar a probabilidade de encontrarmos um aglomerado finito em nossa rede. Podemos perceber que essa probabilidade está associada com a probabilidade de não percolação em um ramo da rede pois, se encontrarmos um aglomerado infinito em pelo menos um ramo, haveria percolação em nossa rede (a figura 3.3 mostra uma rede de Bethe com $r = 3$ e, conseqüentemente, 2 ramos). Dessa forma, podemos escrever:

$$P\{|C| < \infty\} = P\left\{\{|C_1| < \infty\} \cap \{|C_2| < \infty\} \cap \dots \cap \{|C_{r-1}| < \infty\}\right\},$$

onde $|C_i| \equiv$ tamanho do aglomerado da origem no ramo i (Veja figura 3.3).

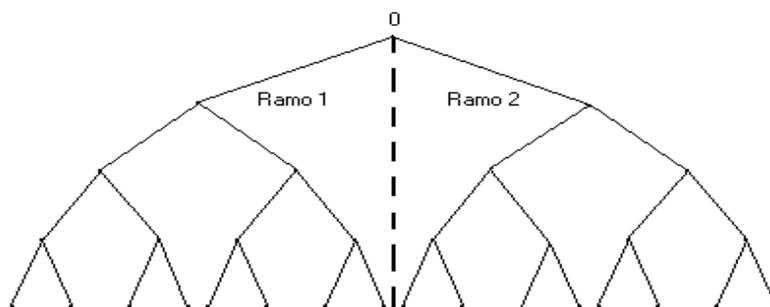


Figura 3.3: Ramos da rede de Bethe $r = 3$.

Exemplo 3.1 Para $r = 3$:

$$P\{|C| < \infty\} = P\left\{\{|C_1| < \infty\} \cap \{|C_2| < \infty\}\right\}$$

Definimos $Q_i \equiv P\{|C_i| < \infty\}$, mas, observe que por simetria $Q_i = Q_j = Q \forall i \neq j$. Além disso, os eventos $\{|C_i| < \infty\}$ são independentes para $i = 1, \dots, r-1$. Logo:

$$P\left\{\{|C_1| < \infty\} \cap \{|C_2| < \infty\} \cap \dots \cap \{|C_{r-1}| < \infty\}\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{r-1} P\{|C_i| < \infty\} = Q^{r-1} \quad (3.14)$$

$$1 - \theta(p) = P\{|C| < \infty\} \quad (3.15)$$

Das equações (3.14) e (3.15) temos:

$$1 - \theta(p) = Q^{r-1} \quad (3.16)$$

Vamos entender melhor Q . Para isso, observe a figura 3.4.

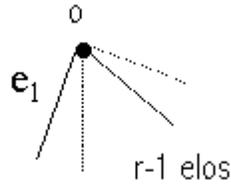


Figura 3.4: Número de elos que emergem da origem em uma rede de Bethe

$$Q = P\left\{\{\omega_{e_1} = 0\} \cup \left\{\{\omega_{e_1} = 1\} \cap \{|C_1| < \infty\} \cap \{|C_2| < \infty\} \cdots \cap \{|C_{r-1}| < \infty\}\right\}\right\} \quad (3.17)$$

Logo, como os eventos são auto-excludentes, temos:

$$Q = (1 - p) + pQ^{r-1} \quad (3.18)$$

Das equações (3.16) e (3.18) vem:

$$\theta = \frac{1 - Q}{p} \quad (3.19)$$

Observe que: $Q = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$.

Na equação (3.16), como $Q \geq 0 \implies 1 - \theta \geq 0$ então:

$$Q = (1 - \theta)^{\frac{1}{r-1}} \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.20) na (3.19), temos:

$$\theta = \frac{1 - (1 - \theta)^{\frac{1}{r-1}}}{p} \quad (3.21)$$

Sejam: $f(\theta) = \theta$ e $g(\theta) = \frac{1 - (1 - \theta)^{\frac{1}{r-1}}}{p}$, podemos observar, a partir da equação (3.21) que, para cada p , o valor de $\theta(p)$ é determinado implicitamente quando $f(\theta) = g(\theta)$. Vamos verificar que isso realmente define uma função $\theta(p)$.

Vamos analisar as derivadas, em relação à θ das funções f e g , em torno do ponto $\theta = 0$:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 1; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{(1 - \theta)^{\frac{2-r}{r-1}}}{p(r-1)} \Rightarrow \left[\frac{\partial g}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = \frac{1}{p(r-1)} \quad (3.22)$$

Podemos observar a partir da equação (3.22):

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = \begin{cases} > 1, & \text{se } p < (r-1)^{-1} \\ = 1, & \text{se } p = (r-1)^{-1} \\ < 1, & \text{se } p > (r-1)^{-1} \end{cases}$$

Logo, como $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ cresce com o aumento de θ podemos afirmar que para $p \leq (r-1)^{-1}$, temos $f(\theta) = g(\theta) \Leftrightarrow \theta = 0$. Entretanto, se $p > (r-1)^{-1}$ além da solução trivial $\theta = 0$, $f(\theta) = g(\theta)$ tem uma solução $\theta > 0$. O gráfico mostrado na figura 3.5 ilustra esse fato.

Dessa forma, podemos concluir que $p_c = \frac{1}{r-1}$ para um rede \mathcal{B}_r .

Outra característica interessante da curva de $g(\theta)$ é que ela possui uma assíntota em $\theta = 1$, o que era de se esperar pois θ é uma probabilidade. Da equação (3.22) vem:

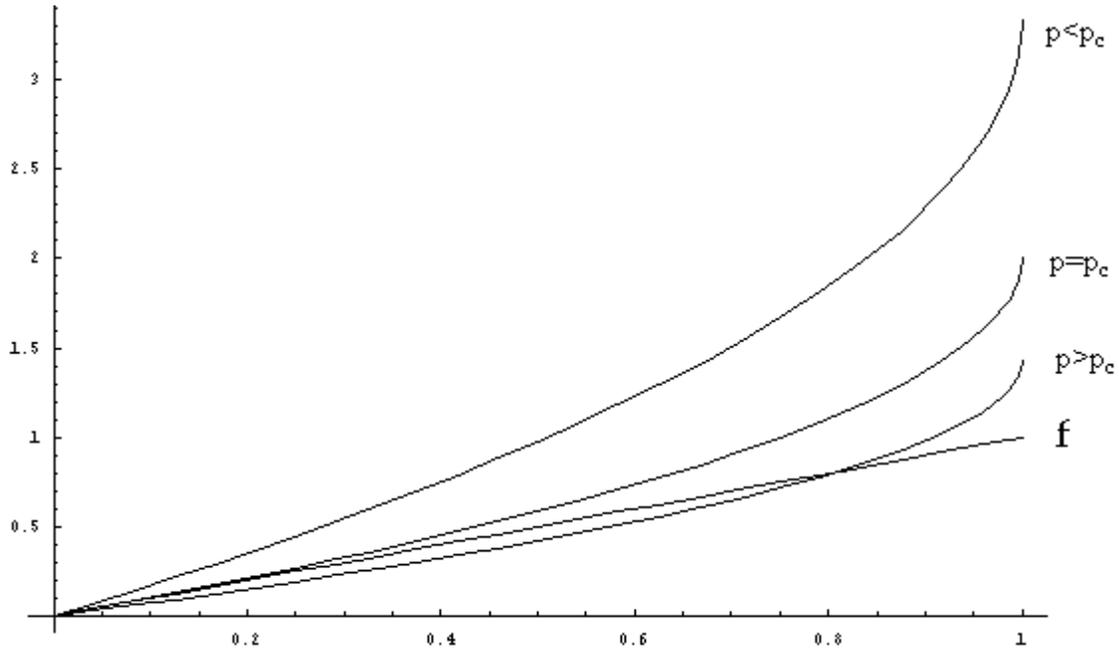


Figura 3.5: Gráfico de f e g para diferentes valores de p

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{(1 - \theta)^{\frac{2-r}{r-1}}}{p(r-1)} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{(1 - \theta)^{\frac{2-r}{r-1}}}{p(r-1)} = \infty \quad \forall \quad r \geq 3$$

3.4 O expoente crítico β

Podemos nos perguntar como a probabilidade de percolação se comporta na região próxima do ponto crítico. Podemos fazer várias conjecturas a respeito desse comportamento mas, vamos assumir que:

$$\begin{aligned} \exists \beta > 0 \text{ e } C > 0 \quad \text{tal que} \quad \lim_{p \rightarrow p_c^+} \frac{\theta(p)}{(p - p_c)^\beta} = C, \quad \text{ou seja:} \\ \theta(p) \approx C(p - p_c)^\beta = Ch^\beta, \quad \text{onde} \quad h \equiv (p - p_c) \end{aligned} \quad (3.23)$$

O expoente β é chamado de *expoente crítico* e, nas próximas seções passaremos a demonstrar que para \mathcal{B}_r : $\beta = 1 \quad \forall \quad r \geq 3$. Há, em percolação vários outros expoentes

críticos, e eles têm sido objeto importante de pesquisa nos últimos anos. Podemos observar que, se for possível encontrar uma solução analítica para θ podemos analisar seu comportamento na região próxima do ponto crítico. Para \mathcal{B}_3 é fácil encontrarmos $\theta(p)$.

Substituindo $r = 3$ na equação (3.18), temos: $Q = (1 - p) + pQ^2$ e, resolvendo, encontramos:

$$Q(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.24)$$

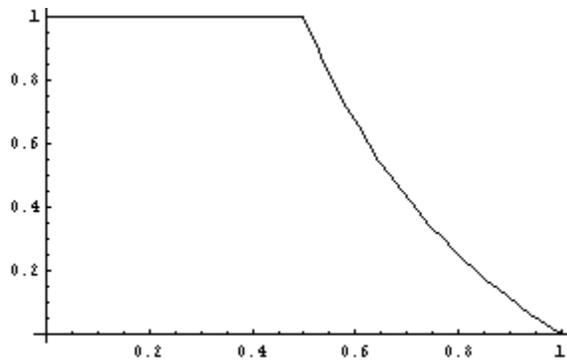


Figura 3.6: Gráfico Qxp para uma rede de Bethe $r = 3$.

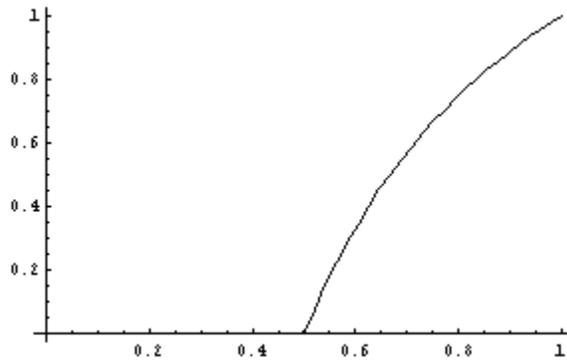


Figura 3.7: Gráfico θxp para uma rede de Bethe $r = 3$.

Substituindo a equação (3.24) na equação (3.19):

$$\theta(p) = \frac{2p - 1}{p^2}, \quad p > \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

Além disso, podemos observar que:

$$\theta(p) = \frac{2\left(p - \frac{1}{2}\right)}{p^2}, \text{ logo, como } p_c = \frac{1}{2}: \\ \lim_{p \rightarrow p_c^+} \frac{\theta(p)}{p - p_c} = \frac{2}{p_c^2} = 8, \text{ logo: } \theta \text{ é linear em } (p - p_c)$$

Dessa forma, para $r = 3$:

$$\theta(p) \approx 8(p - p_c) \Rightarrow \beta = 1 \text{ para } r = 3$$

3.5 Dedução formal de que $\beta = 1$ se $r > 3$

A partir de $r \geq 4$ torna-se difícil encontrar uma expressão analítica para a probabilidade de percolação θ pois, se substituirmos r na equação (3.18), teremos um polinômio cujo grau é maior ou igual a 3. Isso nos leva a utilizar outro método para analisar o seu comportamento próximo do ponto crítico. Nessa seção apresentaremos uma dedução formal para esse problema.

Da equação (3.21) vem:

$$\theta = \frac{1 - (1 - \theta)^{p_c}}{(p - p_c) + p_c} = \frac{1 - (1 - \theta)^{p_c}}{h + p_c} \quad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.23) na (3.26) vem:

$$Ch^\beta(h + p_c) = 1 - (1 - Ch^\beta)^{p_c} \quad (3.27)$$

Observe que, expandindo em séries de Taylor $(1 - x)^\alpha$ em torno de $x = 0$, temos:

$$(1 - x)^\alpha = 1 - \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2} - \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

Desprezando os termos de ordem superior a 2, temos:

$$(1 - x)^\alpha = 1 - \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2} \quad (3.28)$$

Como $h = (p - p_c)$ é muito pequeno para valores de p próximos de p_c , podemos fazer a expansão em séries de Taylor de $(1 - Ch^\beta)^{p_c}$ em torno de $h = 0$. Na equação (3.28):

$$(1 - Ch^\beta)^{p_c} = 1 - p_c Ch^\beta + \frac{p_c(p_c - 1)C^2 h^{2\beta}}{2} \quad (3.29)$$

Substituindo a equação (3.29) na equação (3.27), temos:

$$\begin{aligned} Ch^\beta(h + p_c) &= 1 - \left(1 - p_c Ch^\beta + \frac{p_c(p_c - 1)C^2 h^{2\beta}}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow Ch^{\beta+1} &= \left[\frac{C^2 p_c(1 - p_c)}{2}\right] h^{2\beta} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Da equação (3.30) vem: $\begin{cases} \beta + 1 = 2\beta \Rightarrow \beta = 1 \\ C = \frac{C^2 p_c(1 - p_c)}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{p_c(1 - p_c)} \end{cases}$

Então, podemos concluir que para aproximações de segunda ordem de $(1 - Ch^\beta)^{p_c}$ em torno de $h = 0$, temos $\beta = 1 \forall r \geq 3$.

3.6 Dedução rigorosa de que $\beta = 1$ se $r > 3$

Nessa seção vou provar que o expoente crítico β não depende do número de coordenação na rede de Bethe.

Intuitivamente, sabemos que $\theta(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow p_c^+$, ou seja, $\lim_{p \rightarrow p_c^+} \theta(p) = 0$, conforme ilustra o gráfico mostrado na figura 3.8.

Observe que $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$, logo podemos ver que:

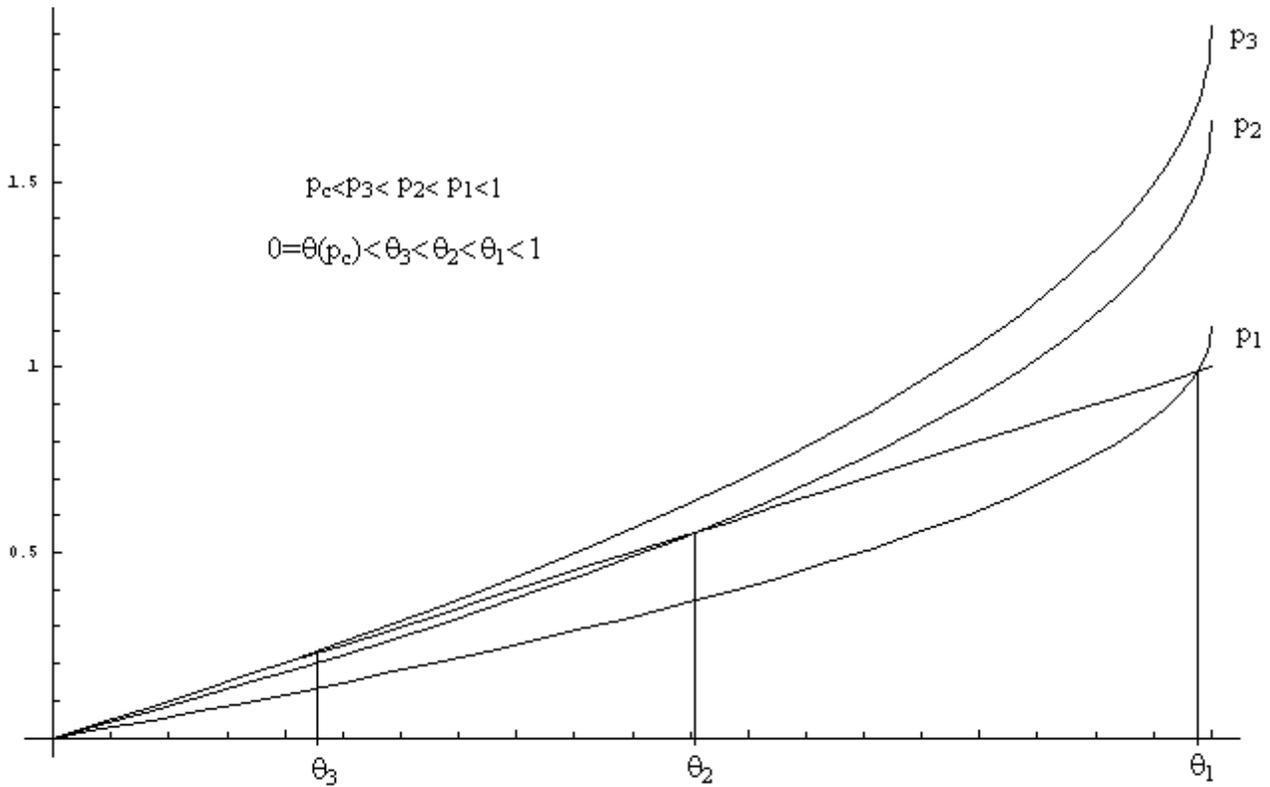


Figura 3.8: Gráfico de $fx\theta$ e $gx\theta$ para diferentes valores de probabilidade acima de p_c , onde $\theta_i = \theta(p_i)$.

$$\lim_{p \rightarrow p_c^+} \theta(p) = 0 \quad (3.31)$$

Podemos reescrever a equação (3.21):

$$\theta p = 1 - (1 - \theta)^{\frac{1}{r-1}} \Rightarrow (1 - \theta p)^{r-1} = 1 - \theta \quad (3.32)$$

Para solucionar esse problema, vamos expandir o primeiro termo da equação (3.32).

$$(1 - \theta p)^{r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-\theta p)^k \quad (3.33)$$

Observe que:

$$\binom{r-1}{k} = \frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!} \quad (3.34)$$

Da equação (3.34) vem:

$$\begin{aligned} \binom{r-1}{0} &= 1; & \binom{r-1}{1} &= r-1 = \frac{1}{p_c}; \\ \binom{r-1}{2} &= \frac{1}{2!}(r-1)(r-2) = \frac{1}{2!}(r-1)^2 \left[1 - \frac{1}{r-1}\right] = \frac{1}{2!}(1-p_c)\frac{1}{p_c^2}; \\ \binom{r-1}{3} &= \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{3!} = \frac{(r-1)^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \left(1 - \frac{2}{r-1}\right) = \\ &= \frac{(1-p_c)(1-2p_c)}{3!p_c^3}; \end{aligned} \quad (3.35)$$

Logo, para $2 \leq k \leq r-1$, temos:

$$\begin{aligned} \binom{r-1}{k} &= \frac{1}{k!p_c^k}(1-p_c)(1-2p_c)(1-3p_c)\dots[1-(k-1)p_c] = \\ &= A_k \frac{1}{p_c^k}, \quad \text{onde } A_k = \frac{1}{k!} \prod_{w=1}^{k-1} (1-wp_c) \quad \forall \quad 2 \leq k \leq r-1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo a equação (3.36) na equação (3.33), temos:

$$(1-\theta p)^{r-1} = 1 - \left(\frac{\theta p}{p_c}\right) + \sum_{k=2}^{r-1} A_k \left(\frac{-\theta p}{p_c}\right)^k \quad (3.37)$$

Substituindo a equação (3.37) na equação (3.32), temos:

$$1 - \left(\frac{\theta p}{p_c}\right) + \sum_{k=2}^{r-1} A_k \left(\frac{-\theta p}{p_c}\right)^k = 1 - \theta \quad (3.38)$$

Proposição 3.3 *Existem contantes positivas C e \bar{p} tal que:*

$$\left| \frac{\theta(p)}{p - p_c} \right| \leq C \quad \forall \quad p \in (p_c, \bar{p}).$$

Prova: Seja $\{p_n\}$ uma seqüência em $(p_c, 1)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_c$. Supondo que $\theta(p)$ seja contínua e derivável no intervalo $(p_c, 1)$, temos, pelo teorema do valor médio, que para todo n , existe \bar{p}_n entre p_c e p_n tal que:

$$\theta'(\bar{p}_n) = \frac{\theta(p_n) - \theta(p_c)}{p_n - p_c} = \frac{\theta(p_n)}{p_n - p_c}, \quad (3.39)$$

onde, na última igualdade acima, usamos que $\theta(p_c) = 0$. Derivando, em relação a p , ambos os lados da equação (3.38), obtemos:

$$\theta' \left[\frac{p}{p_c} - 1 \right] + \frac{\theta}{p_c} = \sum_{k=2}^{r-1} A_k (-1)^k k \left(\frac{\theta p}{p_c}\right)^{k-1} \left(\frac{\theta' p}{p_c} + \frac{\theta}{p_c}\right). \quad (3.40)$$

Defina as funções R e S da seguinte maneira:

$$S(\theta, p) = \sum_{k=2}^{r-1} A_k (-1)^k k \left(\frac{\theta p}{p_c}\right)^{k-1} = \theta \sum_{k=2}^{r-1} A_k (-1)^k k \theta^{k-2} \left(\frac{p}{p_c}\right)^{k-1} = \theta R,$$

$$\text{onde } R = R(\theta, p) = \sum_{k=2}^{r-1} A_k (-1)^k k \theta^{k-2} \left(\frac{p}{p_c}\right)^{k-1} \quad (3.41)$$

Usando as definições de R e S na equação (3.40), temos:

$$\theta' \left[\frac{p}{p_c} (\theta R - 1) + 1 \right] = \frac{\theta}{p_c} (1 - \theta R) \Rightarrow$$

$$\theta' \left[\frac{1}{1 - \theta R} - \frac{p}{p_c} \right] = \frac{\theta}{p_c} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{\theta}{p_c} \left[\frac{1}{1 - \theta R} - \frac{p}{p_c} \right]^{-1} \Rightarrow \\
\theta' &= \theta \left[\frac{1 - \theta R}{p_c - p + p\theta R} \right] \Rightarrow \\
\theta' &= \left[\frac{1 - \theta R}{\frac{p_c - p}{\theta} + pR} \right], \tag{3.42}
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade usamos que $\theta(p) > 0$ se $p > p_c$. A equação (3.42) está bem definida para todo $p > p_c$ e, quando aplicada à seqüência $\{p_n\}$, ela nos fornece a seguinte relação:

$$\theta'(p_n) = \left[\frac{1 - \theta(p_n)R}{\frac{p_c - p_n}{\theta(p_n)} + p_n R} \right] \quad \forall \quad p_n \in (p_c, 1) \tag{3.43}$$

Substituindo a equação (3.39) na equação (3.43):

$$\theta'(p_n) = \left[\frac{1 - \theta(p_n)R}{\frac{-1}{\theta'(\bar{p}_n)} + p_n R} \right] \tag{3.44}$$

A prova da proposição segue agora por contradição. Sabemos que $\theta'(p)$ é não negativa se $p > p_c$. Suponha, por contradição, que $\theta'(p)$ não seja limitada numa vizinhança à direita de p_c . Então, para a nossa seqüência $\{p_n\}$, temos que $\theta'(p_n) \mapsto \infty$ quando $p_n \mapsto p_c^+$. Logo, como $\bar{p}_n \in (p_c, p_n)$ temos, também que $\theta'(\bar{p}_n) \mapsto \infty$ quando $p_n \mapsto p_c^+$. Tomando o limite de ambos os lados da equação (3.44) chegamos à seguinte contradição:

$$\infty = \lim_{p_n \rightarrow p_c^+} \theta'(p_n) = \left[\frac{1}{p_c R(0, p_c)} \right] = \frac{1}{2p_c A_2} = \text{Constante}, \quad (\text{absurdo}).$$

□

Da equação (3.38) vem:

$$\theta \left(\frac{p}{p_c} - 1 \right) = A_2 \theta^2 \left(\frac{p}{p_c} \right)^2 + \dots + (-1)^k A_k \theta^k \left(\frac{p}{p_c} \right)^k + \dots + (-1)^{r-1} A_{r-1} \theta^{r-1} \left(\frac{p}{p_c} \right)^{r-1} \tag{3.45}$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.45) por $\theta \left(\frac{p}{p_c} - 1 \right)$, temos:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{p}{p_c} - 1\right)^{-1} \left[A_2 \theta \left(\frac{p}{p_c}\right)^2 + \dots + (-1)^k A_k \theta^{k-1} \left(\frac{p}{p_c}\right)^k + \dots + (-1)^{r-1} A_{r-1} \theta^{r-2} \left(\frac{p}{p_c}\right)^{r-1} \right] = \\
&= \left(\frac{p_c}{p - p_c}\right) \left[A_2 \theta \left(\frac{p}{p_c}\right)^2 + \dots + (-1)^k A_k \theta^{k-1} \left(\frac{p}{p_c}\right)^k + \dots + (-1)^{r-1} A_{r-1} \theta^{r-2} \left(\frac{p}{p_c}\right)^{r-1} \right] \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 3.3, tomamos o limite com $(p \rightarrow p_c^+)$ de ambos os lados da equação (3.46). Dessa forma:

$$1 = p_c A_2 \lim_{p \rightarrow p_c^+} \frac{\theta}{(p - p_c)} \Rightarrow \lim_{p \rightarrow p_c^+} \frac{\theta}{(p - p_c)} = \frac{1}{p_c A_2} \tag{3.47}$$

Da equação (3.36) vem:

$$A_2 = \frac{1}{2}(1 - p_c)$$

Logo, na equação (3.47) temos:

$$\lim_{p \rightarrow p_c^+} \frac{\theta}{(p - p_c)} = \frac{2}{p_c(1 - p_c)} \tag{3.48}$$

Portanto, podemos concluir que o expoente crítico β é igual a 1 para todo $r \geq 3$.

3.7 Outras possibilidades

Descrevemos informalmente a seguir algumas possibilidades de generalização dos modelos descritos nas seções anteriores.

Uma variação do modelo que podemos imaginar é a de que nem todos os elos têm a mesma probabilidade de estarem abertos. Na rede quadrada \mathbb{Z}^2 tomamos dois parâmetros, p_v e p_h que designam a probabilidade de um elo vertical e de um elo horizontal estarem abertos

respectivamente. Encontramos também nessa generalização um transição de fase que ocorre exatamente na superfície $p_v + p_h = 1$ dos parâmetros.

Outra possibilidade é a de colocarmos o caráter aleatório do modelo nos próprios sítios e não mais nos elos. Da mesma forma dizemos que dois sítios estão conectados se há um caminho de sítios primeiros vizinhos abertos entre os dois. Esse modelo é na realidade uma generalização do modelo de percolação de elos uma vez que podemos mostrar que toda rede de elos pode ser descrita como uma rede de sítios. Deixemos essa afirmação imprecisa; para torná-la rigorosa seria necessário bastante mais esforço.

Pode-se tentar também modelar a força da gravidade dando, no modelo de elos, preferência para umas certas direções. Na rede bidimensional determinamos, por exemplo, que o líquido só pode ir de cima para baixo, nos elos verticais, e da esquerda para a direita, nos elos horizontais. Dizemos então que dois sítios estão conectados se existe um caminho de elos abertos nas direções descritas acima, que permita a passagem do líquido. Esse é a percolação orientada que da mesma forma que as anteriores apresenta transição de fase. Observamos, sem demonstrar, que o comportamento assintótico do ponto crítico nesse modelo (ou melhor, na sua generalização natural para d dimensões) é da forma $1/d$, isso se deve ao fato de que somente d elos emanam de cada sítio.

Podemos ainda modelar um comportamento dinâmico do líquido (por exemplo, na percolação de primeira passagem), supor diferentes graus de abertura dos elos ou ainda afrouxar as restrições do ambiente ser uma rede e criarmos o que se chama percolação contínua. Essas generalizações naturalmente tornam o modelo mais complexo e certamente mais difícil de ser tratado e o maior interesse dos modelos estudados aqui é exatamente sua simplicidade.

Bibliografia

- [1] S. R. Broadbent and J.M. Hammersley, *Percolation Processes I. Crystals and Mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**, 629-641, (1957).
- [2] T. Tomé e M.J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, EdUSP, São Paulo (2001).
- [3] J. Chayes and L. Chayes, *Percolation and Random Media*, in *Critical phenomena, random systems and gauge theories*, Les Houches Session XLIII 1984, K. Osterwalder and R. Stora eds., Elsevier Science Publishers B. V. (1986).
- [4] B.I. Shklovskii, A.L. Efros, *Percolation theory and conductivity of disordered systems*, Uspekhi Fiz. Nauk 117, **401**(1975).
- [5] M. Sahini, *Application of Percolation Theory*, Taylor and Francis, London, (1994).
- [6] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis, London (1992).
- [7] G. Grimmett, *Percolation*, Springer Verlag, New York (1989).
- [8] L.R. Fontes, *Percolação*, notas do IMPA, Rio de Janeiro (1996).
- [9] L.R. Fontes, *Percolação, um modelo simples (e interessante) para um meio poroso*. Matemática Universitária. Brasil: , v.28, p.1 - 17, (2000).
- [10] M.M. de Oliveira e Gastão A. Braga; *Um estudo da fase subcrítica para o modelo de primeiros vizinhos em uma rede hiper-cúbica d-dimensional*, trabalho em preparação. Resumo no Livro de Resumos da IX Semana de Iniciação Científica da UFMG, Belo Horizonte, (2000).
- [11] M.M. de Oliveira e Gastão A. Braga; *A desigualdade de Van den Berg-Kersten e suas aplicações em modelos de percolação*, trabalho em preparação. Resumo nos Anais da X Semana de Iniciação Científica da UFMG, Belo Horizonte, (2001).

- [12] M.M. de Oliveira e Gastão A. Braga; *O Fenômeno de Transição de Fase no Modelo de Percolação de Elos em d Dimensões*, artigo aceito para publicação na Revista Brasileira de Ensino de Física.
- [13] Tiago A. Schieber e Gastão A. Braga; *Percolação de Elos Independentes em Redes de Bethe: um Estudo Rigoroso na Vizinhança do Ponto Crítico*, trabalho em preparação. Resumo a aparecer Livro de Resumos da XII Semana de Iniciação Científica da UFMG, Belo Horizonte, (2002).
- [14] H. Kesten, *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhauser (1982).
- [15] Gastão A. Braga, Francisco F. Araujo Jr., *Caracterização da fase desordenada do modelo de Ising d -dimensional via desigualdades de correlações* aceito para publicação em Matemática Universitária, (2002).
- [16] Gastão A. Braga, Francisco F. Araujo Jr., *O Limite Termodinâmico e Independência das Condições de Contorno para o Modelo de Ising d -Dimensional*, Matemática Universitária, (2001).
- [17] G.F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, São Paulo : McGraw-Hill, (1987).