Coleção
SCHAUM

Problema Resolvido

Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas

Terceira edição

Mais de 2400 fórmulas e tabelas

- Abrange desde a matemática elementar até tópicos avançados
- Organizado de forma a facilitar a consulta

ÚTIL EM TODAS AS DISCIPLINAS!

Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz e John Liu

bookman

S755m Spiegel, Murray R.

Manual de fórmulas e tabelas matemáticas [recurso eletrônico] / Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, John Liu ; tradução técnica: Claus Ivo Doering. – 3. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2012.

(Coleção Schaum)

Editado também como livro impresso em 2011.

ISBN 978-85-407-0056-7

1. Matemática. 2. Manual. 3. Tabelas. I. Lipschutz, Seymour. II. Liu, John. III. Título.

CDU 51(035)(083)

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

Murray R. Spiegel, Ph.D.
Ex-professor e Chefe do Departamento de Matemática do
Rensselaer Polytechnic Institute
Hartford Graduate Center

Seymour Lipschutz, Ph.D.
Departamento de Matemática
Temple University

John Liu, Ph.D.
Departamento de Matemática
University of Maryland

Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas

Terceira edição

Tradução técnica:
Dr. Claus Ivo Doering
Doutor em matemática pelo IMPA
Professor Titular do Instituto de Matemática da UFRGS

Versão impressa
desta obra: 2011

bookman

2012

Obra originalmente publicada sob o título
Schaum's Outline: Mathematical Handbook of Formulas and Tables,3/Ed.

ISBN: 007-154855-6

Capa: *Rogério Grilho (arte sobre capa original)*

Editora Sênior: *Denise Weber Nowaczyk*

Projeto e editoração: *Techbooks*

MURRAY R. SPIEGEL, já falecido, recebeu o grau de Mestre em Física e Doutor em Matemática da Cornell University. Trabalhou nas universidades de Harvard, Columbia, Oak Ridge e no Rensselaer Polytechnic Institute, e também atuou como consultor matemático junto a diversas empresas importantes. Sua última posição foi como professor e Chefe do Departamento de Matemática no Rensselaer Polytechnic Institute do Hartford Graduate Center. Dedicou-se a vários ramos da Matemática, especialmente aqueles que envolvem aplicações a problemas de Física e Engenharia. É autor de muitos artigos publicados em revistas científicas e de 14 livros sobre vários tópicos em Matemática.

SEYMOUR LIPSCHUTZ faz parte do corpo docente da Temple University, tendo lecionado, anteriormente, no Instituto Politécnico do Brooklin. Recebeu o grau de Doutor da New York University e é um dos autores mais produtivos da Coleção Schaum. Escreveu, dentre outros, os livros de Álgebra Linear, Probabilidade, Matemática Discreta, Teoria de Conjuntos, Matemática Finita e Topologia Geral.

JOHN LIU atualmente é professor de Matemática na University of Maryland, tendo lecionado, anteriormente, na Temple University. Recebeu o grau de Doutor da University of California e foi professor visitante das universidades de New York, Princeton e Berkeley. Publicou diversos trabalhos sobre Matemática Aplicada, incluindo as áreas de Equações Diferenciais Parciais e Análise Numérica.

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S.A.
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000   Fax: (51) 3027-7070

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100   Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Prefácio

Este manual reúne uma coleção de fórmulas e tabelas matemáticas que será valiosa para estudantes e pesquisadores nas áreas de Matemática, Física, Engenharia e outras ciências. Tivemos o cuidado de incluir somente aquelas fórmulas e tabelas que provavelmente serão mais utilizadas, ignorando resultados altamente especializados que raramente serão necessários. O material apresentado neste manual de fácil utilização provém de assuntos profundamente enraizados em cursos matemáticos e científicos universitários. Na verdade, a primeira edição ainda pode ser encontrada em muitas bibliotecas e escritórios e, muito provavelmente, tem acompanhado seus donos de emprego em emprego, desde sua época de faculdade. Assim, este manual sobreviveu ao teste do tempo (enquanto a maioria dos outros livros da faculdade já foi jogada fora).

Esta nova edição mantém o mesmo espírito da segunda, com as seguintes alterações. Em primeiro lugar, retiramos algumas tabelas desatualizadas que, hoje em dia, podem ser facilmente obtidas com calculadoras simples e omitimos fórmulas raramente utilizadas. A principal mudança foi a expansão das seções sobre Probabilidade e Variáveis Aleatórias, com a inclusão material novo. Esses dois assuntos aparecem tanto nas ciências físicas quanto sociais, inclusive na Educação.

Os tópicos abordados variam do básico ao avançado. Os tópicos básicos incluem os de Álgebra, Geometria, Trigonometria, Geometria Analítica, Probabilidade e Estatística e Cálculo. Os tópicos avançados incluem os de Equações Diferenciais, Análise Numérica e de Análise Vetorial, como séries de Fourier, funções beta e gama, funções de Bessel e Legendre, transformadas de Fourier e Laplace e funções elípticas e outras funções especiais importantes. Esta ampla cobertura de tópicos foi adotada para fornecer, em apenas um volume, a maioria dos resultados matemáticos importantes que o estudante e o pesquisador necessita, independentemente de seu campo de interesse ou nível de conhecimento.

Este livro está dividido em duas partes. A Parte A apresenta fórmulas matemáticas junto com algum outro material, essencial para o devido entendimento e aplicação das fórmulas, como definições, teoremas, gráficos, diagramas, etc. A Parte B apresenta as tabelas numéricas, que incluem as distribuições estatísticas básicas (normal, t de Student, qui-quadrada, etc.), funções especiais (Bessel, Legendre, elípticas, etc.) e funções financeiras (montante composto e valor presente de uma quantidade e anuidade).

A McGraw-Hill deseja agradecer aos diversos autores e editoras (por exemplo, o agente literário do falecido Sir Ronald A. Fischer, F.R.S., o Dr. Frank Yates, F.R.S. e Oliver and Boyd Ltd., de Edinburgh, pela Tabela III de seu livro *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*) que deram sua permissão para adaptar dados de seus livros para utilização em várias tabelas deste manual. As referências apropriadas a tais fontes são dadas junto às tabelas correspondentes.

Finalmente, gostaria de agradecer à equipe da Coleção Schaum na McGraw-Hill, especialmente Charles Wall, por sua cooperação dedicada.

Seymour Lipschutz
Temple University

Sumário

Parte A
FÓRMULAS

Alfabeto Grego e Constantes Especiais

1

Alfabeto grego

Nome Grego	Letras Gregas	
	Minúsculas	Maiúsculas
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gama	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsílon	ϵ	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Teta	θ	Θ
Iota	ι	I
Capa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mi	μ	M

Nome Grego	Letras Gregas	
	Minúsculas	Maiúsculas
Ni	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Ômicron	o	O
Pi	π	Π
Rô	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Ipsílon	υ	Υ
Fi	ϕ	Φ
Qui	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Ômega	ω	Ω

Constantes especiais

1.1 $\pi = 3{,}14159\ \ 26535\ \ 89793 \ldots$

1.2 $e = 2{,}71828\ \ 18284\ \ 59045 \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

= base natural dos logaritmos

1.3 $\gamma = 0{,}57721\ \ 56649\ \ 01532\ \ 86060\ \ 6512 \ldots =$ *constante de Euler*

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

1.4 $e^{\gamma} = 1{,}78107\ \ 24179\ \ 90197\ \ 9852 \ldots$ [ver 1.3]

1.5 $\sqrt{e} = 1{,}64872\ 12707\ 00128\ 1468 \ldots$

1.6 $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 8167 \ldots$

onde Γ é a *função gama* [ver 25.1].

1.7 $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2{,}67893\ 85347\ 07748 \ldots$

1.8 $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3{,}62560\ 99082\ 21908 \ldots$

1.9 1 radiano $= 180°/\pi = 57{,}29577\ 95130\ 8232 \ldots°$

1.10 $1° = \pi/180$ radianos $= 0{,}01745\ 32925\ 19943\ 29576\ 92 \ldots$ radianos

Produtos e Fatores Especiais

2

2.1 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2.2 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

2.3 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

2.4 $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

2.5 $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

2.6 $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

2.7 $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

2.8 $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

2.9 $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

2.10 $(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

Os resultados de 2.1 a 2.10 são casos especiais da *fórmula binomial* [ver 3.3].

2.11 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

2.12 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

2.13 $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

2.14 $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$

2.15 $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

2.16 $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

2.17 $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.18 $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.19 $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

Algumas generalizações das fórmulas acima são dadas pelos seguintes resultados, onde n é um inteiro positivo.

2.20 $x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + y^{2n})$

$$= (x-y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

$$\cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

2.21 $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + y^{2n})$

$$= (x+y)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

$$\cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

2.22 $x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots)$

$$= (x-y)(x+y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{n} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{n} + y^2\right)$$

$$\cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + y^2\right)$$

2.23 $x^{2n} + y^{2n} = \left(x^2 + 2xy\cos\frac{\pi}{2n} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{3\pi}{2n} + y^2\right)$

$$\cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2\right)$$

Fórmula Binomial e Coeficientes Binomiais

3

Fatorial de *n*

Para $n = 1, 2, 3, ...$, o *fatorial de n* é denotado e definido por

3.1 $n! = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Zero fatorial é definido por

3.2 $0! = 1$

Alternativamente, podemos definir fatorial de n recursivamente por

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n\cdot(n-1)!$$

Exemplo $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$,
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 5(24) = 120$,
$6! = 6\cdot 5! = 6(120) = 720$

Fórmula binomial para *n* inteiro positivo

Para $n = 1, 2, 3, ...$,

3.3 $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

Esta é a *fórmula binomial*. Ela pode ser estendida a outros valores de n e, também, a uma série infinita [ver 22.4].

Exemplo

(a) $(a-2b)^4 = a^4 + 4a^3(-2b) + 6a^2(-2b)^2 + 4a(-2b)^3 + (-2b)^4 = a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$

Aqui, $x = a$ e $y = -2b$.

(b) Ver Fig. 3-1(a).

Coeficientes binomiais

A Fórmula 3.3 pode ser reescrita na forma

3.4 $(x+y)^n = x^n + \dbinom{n}{1}x^{n-1}y + \dbinom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dbinom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \dbinom{n}{n}y^n$

onde os coeficientes, denominados *coeficientes binomiais*, são dados por

3.5 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{n-k}$

Exemplo $\binom{9}{4} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126,\qquad \binom{12}{5} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792,\qquad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

Observe que $\binom{n}{r}$ tem exatamente r fatores tanto no numerador quanto no denominador.

Os coeficientes binomiais podem ser arranjados numa disposição triangular de números chamada triângulo de Pascal, como mostrado na Fig. 3-1(*b*). O triângulo possui as duas seguintes propriedades.

(1) O primeiro e o último número em cada linha é 1.

(2) Todos os outros números no triângulo podem ser obtidos adicionando os dois números que aparecem diretamente acima do número. Por exemplo,

$$10 = 4 + 6, \qquad 15 = 5 + 10, \qquad 20 = 10 + 10$$

A propriedade (2) pode ser enunciada como segue.

3.6 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a + b\\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

(*a*)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots
\end{array}$$

(*b*)

Fig. 3-1

Propriedades de coeficientes binomiais

A lista a seguir dá propriedades adicionais dos coeficientes binomiais.

3.7 $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

3.8 $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

3.9 $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \left(\dfrac{n+m+1}{n+1}\right)$

3.10 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$

3.11 $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$

3.12 $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

3.13 $\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$

3.14 $$(1)\binom{n}{1}+(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}+\cdots+(n)\binom{n}{n}=n2^{n-1}$$

3.15 $$(1)\binom{n}{1}-(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}-\cdots(-1)^{n+1}(n)\binom{n}{n}=0$$

Fórmula multinomial

Sejam $n_1, n_2,\ldots, n_r$ inteiros não negativos tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Então a seguinte expressão, denominada *coeficiente multinomial*, é definida por

3.16 $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}=\frac{n!}{n_1!\, n_2!\cdots n_r!}$$

Exemplo $\binom{7}{2,\ 3,\ 2}=\frac{7!}{2!3!2!}=210,\quad \binom{8}{4,\ 2,\ 2,\ 0}=\frac{8!}{4!2!2!0!}=420$

O nome coeficiente multinomial vem da seguinte fórmula

3.17 $$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n=\sum\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

onde a soma, denotada por Σ, é tomada sobre todos os coeficientes multinomiais possíveis.

4 Números Complexos

Definições envolvendo números complexos

Um número complexo z é, geralmente, escrito na forma

$$z = a + bi$$

onde a e b são números reais e i, chamada *unidade imaginária*, tem a propriedade $i^2 = -1$. Os números reais a e b são chamados *partes real* e *imaginária* de $z = a + bi$, respectivamente.

O *conjugado complexo* de z é denotado por $\bar{z}$ e é definido por

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Assim, $a + bi$ e $a - bi$ são conjugados um do outro.

Igualdade de números complexos

4.1 $a + bi = c + di$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$

Aritmética de números complexos

Fórmulas para adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos são as seguintes:

4.2 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

4.3 $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

4.4 $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4.5 $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$

Observe que as operações dadas são obtidas usando as regras normais da Álgebra e substituindo i^2 por -1, onde quer que isso ocorra.

Exemplo Suponha que $z = 2 + 3i$ e $w = 5 - 2i$. Então

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 2 + 5 + 3i - 2i = 7 + i$$

$$zw = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$$

$$\bar{z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i \quad \text{e} \quad \bar{w} = \overline{5 - 2i} = 5 + 2i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{5 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 19i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$$

Plano complexo

Os números reais podem ser representados por pontos em uma reta, chamada de *reta real*. Analogamente, os números complexos podem ser representados por pontos em um plano, chamado *diagrama de Argand* ou *plano gaussiano* ou, simplesmente, de *plano complexo*. Mais especificamente, deixamos o ponto (a, b) no plano representar o número complexo $z = a + bi$. Por exemplo, o ponto P, na Fig. 4-1, representa o número complexo $z = -3 + 4i$. O número complexo pode ser também interpretado como um vetor da origem O ao ponto P.

O *valor absoluto* de um número complexo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, é definido por

4.6 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Observamos que $|z|$ é a distância da origem O ao ponto z no plano complexo.

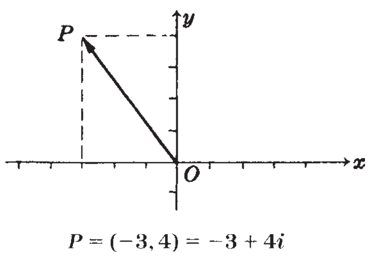


Fig. 4-1

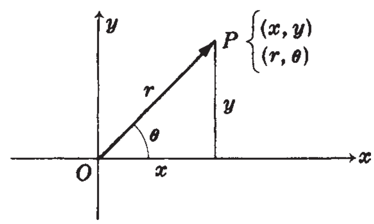


Fig. 4-2

Forma polar de números complexos

O ponto P, na Fig. 4-2, com coordenadas (x, y), representa o número complexo $z = x + yi$. O ponto P também pode ser representado pelas *coordenadas polares* (r, θ). Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, temos

4.7 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

chamada de *forma polar* do número complexo. Frequentemente, chamamos $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de *módulo* e θ a *amplitude* de $z = x + yi$.

Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar

4.8 $[r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)] = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

4.9 $\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Teorema de De Moivre

Para qualquer número real p, o Teorema de De Moivre afirma que

4.10 $[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^p = r^p(\cos p\theta + i\,\text{sen}\,p\theta)$

Raízes de números complexos

Seja $p = 1/n$, onde n é qualquer número inteiro positivo. Então 4.10 pode ser escrito como

4.11 $$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

onde k é qualquer número inteiro. A partir desta fórmula podemos obter todas as n raízes enésimas de um número complexo, tomando $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Soluções de Equações Algébricas

5

Equação quadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

5.1 Soluções
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se a, b e c são números reais e se $D = b^2 - 4ac$ é o *discriminante*, então as raízes são

(i) reais e desiguais se $D > 0$
(ii) reais e iguais se $D = 0$
(iii) conjugadas complexas se $D < 0$

5.2 Se x_1, x_2 são as raízes, então, $x_1 + x_2 = -b/a$ e $x_1x_2 = c/a$.

Equação cúbica: $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

Sejam
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$
$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

onde $ST = -Q$.

5.3 Soluções
$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \end{cases}$$

Se a_1, a_2 e a_3 são reais e se $D = Q^3 + R^2$ é o *discriminante*, então

(i) uma raiz é real e duas são complexas conjugadas se $D > 0$;
(ii) todas as raízes são reais e, no mínimo, duas são iguais se $D = 0$ e
(iii) todas as raízes são reais e desiguais se $D < 0$.

Se $D < 0$, o cálculo é simplificado usando-se trigonometria.

5.4 Soluções

se $D < 0$:
$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta + 120°) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta + 240°) - \frac{1}{3}a \end{cases}$$

onde $\cos\theta = R/\sqrt{-Q^3}$

5.5 $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$

onde x_1, x_2 e x_3 são as três raízes.

Equação quártica: $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$

Seja y_1 uma raiz real da equação cúbica

5.6 $y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0$

As quatro raízes da equação quártica são as quatro raízes da equação

5.7 $z^2 + \frac{1}{2}\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1}\right)z + \frac{1}{2}\left(y_1 \mp \sqrt{y_1^2 - 4a_4}\right) = 0$

Suponha que todas as raízes da Equação 5.6 são reais; então o cálculo é simplificado usando a raiz particular que produz todos os coeficientes reais na Equação Quadrática 5.7.

5.8 $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4 = a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -a_3 \\ x_1x_2x_3x_4 = x_4 \end{cases}$$

onde x_1, x_2, x_3 e x_4 são as quatro raízes.

6 Fatores de Conversão

Comprimento	1 quilômetro (km) = 1.000 metros = 0,6214 milhas 1 metro (m) = 100 centímetros = 1,094 jardas 1 centímetro (cm) = 10^{-2} m = 0,3937 polegadas 1 polegada (in) = 2,540 cm 1 pé (ft) = 12 in = 30,48 cm 1 jarda (yd) = 3 ft = 91,44 cm 1 milha (mi) = 1.760 yd = 1,609 km 1 milímetro (mm) = 10^{-3} m 1 micrômetro (μm) = 10^{-6} m 1 angström (Å) = 10^{-10}m
Área	1 quilômetro quadrado (km^2) = 100 hectares = 247,104 acres 1 metro quadrado (m^2) = 10,76 ft^2 1 centímetro quadrado (cm^2) = 0,155 in^2 1 hectare (ha) = 100 ares = 10^4 m^2 = 2,471 acres 1 are (a) = 100 m^2 = 119,6 yd^2 1 acre = 0,4047 ha = 43.560 ft^2 1 polegada quadrada (in^2) = 6,45 cm^2 1 pé quadrado (ft^2) = 929 cm^2 1 milha quadrada (mi^2) = 640 acres = 2,590 km^2
Volume	1 litro (l) = 1.000 cm^3 = 61,02 in^3 = 0,03532 ft^3 1 metro cúbico (m^3) = 1.000 l = 35,32 ft^3 1 galão americano (gal) = 231 in^3 = 3,785 l 1 pé cúbico (ft^3) = 7,481 gal = 0,02832 m^3 = 28,32 l
Massa	1 quilograma (kg) = 1.000 gramas = 2,2046 libras 1 grama (g) = 10^{-3} kg 1 onça (oz) = 28,35 g 1 libra (lb) = 16 oz = 453,6 g
Velocidade	1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h = 0,9113 ft/s 1 mi/h = 1,467 ft/s = 1,609 km/h = 0,4470 m/s
Densidade	1 g/cm^3 = 1.000 kg/m^3 = 62,43 lb/ft^3 1 lb/ft^3 = 0,01602 g/cm^3
Força	1 quilograma-força (kgf) = 9,807 newton = 2,205 lb-peso 1 newton (N) = 10^5 dinas = 0,1020 kgf = 0,2248 lb-peso 1 dina (dyn) = 10^{-5} N 1 libra-peso (lbf) = 4,448 N = 0,4536 kgf
Energia	1 unidade térmica britânica (btu) = 778 lbf ft = 1055 joules = 0,293 watt-hora

	1 joule (J) = 1 watt-segundo = 1 N m = 10^7 ergs = 0,2389 calorias = $9{,}481 \times 10^{-4}$ btu
	1 libra-peso pé (lbf ft) = 1,356 J = 0,3239 calorias = $1{,}285 \times 10^{-3}$ btu
	1 caloria (cal) = 4,186 J = 3,087 lbf ft = $3{,}968 \times 10^{-3}$ btu
	1 quilowatt-hora (kwh) = 1000 watt-hora = $3{,}6 \times 10^6$ J = 860.000 cal = 3.413 btu
	1 elétron-volt (eV) = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
Potência	1 watt (W) = 1 J/s = 10^7 ergs/s = 0,2389 cal/s
	1 horse-power (HP) = 745,7 W = 550 lbf ft/s
	1 cavalo-vapor (cv) = 735,5 W
	1 quilowatt (kw) = 1,341 HP = 737,6 lbf ft/s = 0,9483 btu/s
Pressão	1 pascal (Pa) = 1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2 = $9{,}869 \times 10^{-6}$ atm = $2{,}089 \times 10^{-2}$ lbf/ft^2
	1 atmosfera (atm) = $1{,}013 \times 10^5$ Pa = $1{,}013 \times 10^6$ dyn/cm^2 = 76 cm Hg

Fórmulas Geométricas 7

Retângulo de comprimento b e largura a

7.1 Área $= ab$

7.2 Perímetro $= 2a + 2b$

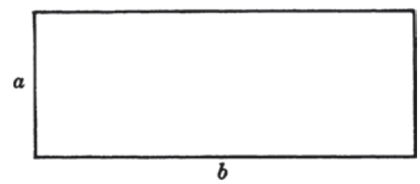


Fig. 7-1

Paralelogramo de altura h e base b

7.3 Área $= bh = ab \operatorname{sen} \theta$

7.4 Perímetro $= 2a + 2b$

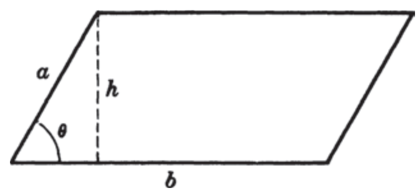


Fig. 7-2

Triângulo de altura h e base b

7.5 Área $= \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro

7.6 Perímetro $= a + b + c$

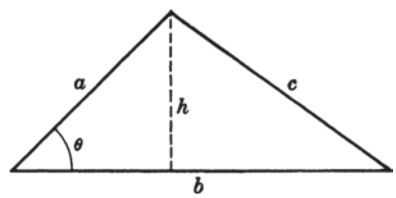


Fig. 7-3

Trapezoide de altura h e lados paralelos a e b

7.7 Área $= \frac{1}{2} h(a + b)$

7.8 Perímetro $= a + b + h\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} \phi}\right)$

$$= a + b + h(\operatorname{cossec} \theta + \operatorname{cossec} \phi)$$

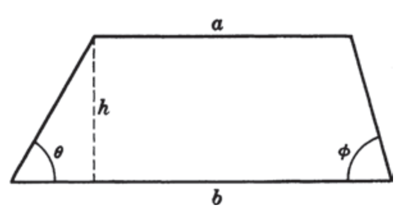


Fig. 7-4

Polígono regular de *n* lados de comprimento *b*

7.9 $\text{Área} = \frac{1}{4}nb^2 \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$

7.10 Perímetro $= nb$

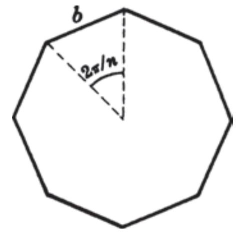


Fig. 7-5

Círculo de raio *r*

7.11 Área $= \pi r^2$

7.12 Perímetro $= 2\pi r$

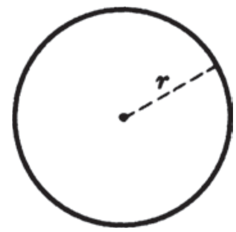


Fig. 7-6

Setor do círculo de raio *r*

7.13 $\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta$

7.14 Comprimento do arco $s = r\theta$

[com θ em radianos]

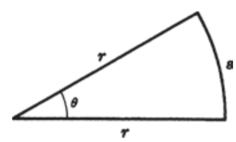


Fig. 7-7

Raio de um círculo inscrito em um triângulo de lados *a, b, c*

7.15 $r = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

onde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro.

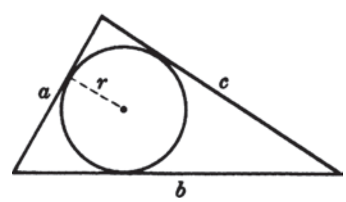


Fig. 7-8

Raio de um círculo circunscrito a um triângulo de lados *a, b, c*

7.16 $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

onde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro.

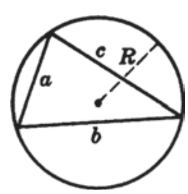


Fig. 7-9

Polígono regular de *n* lados inscrito em um círculo de raio *r*

7.17 Área $= \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\frac{360°}{n}$

7.18 Perímetro $= 2nr \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = 2nr \operatorname{sen}\frac{180°}{n}$

Fig. 7-10

Polígono regular de *n* lados circunscrito a um círculo de raio *r*

7.19 Área $= nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = nr^2 \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

7.20 Perímetro $= 2nr \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 2nr \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

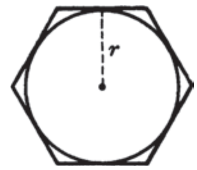


Fig. 7-11

Segmento de um círculo de raio *r*

7.21 Área da parte sombreada $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

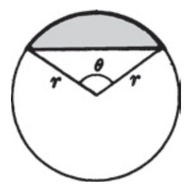


Fig. 7-12

Elipse de semieixo maior *a* e semieixo menor *b*

7.22 Área $= \pi ab$

7.23 Perímetro $= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

$$= 2\pi\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)} \quad \text{[aproximadamente]}$$

onde $k = \sqrt{a^2-b^2}/a$. Ver Tabela 29 para valores numéricos.

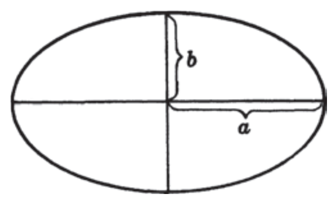


Fig. 7-13

Segmento de uma parábola

7.24 Área $= \frac{2}{3}ab$

7.25 Comprimento do arco $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+16a^2} + \frac{b^2}{8a}\ln\left(\frac{4a+\sqrt{b^2+16a^2}}{b}\right)$

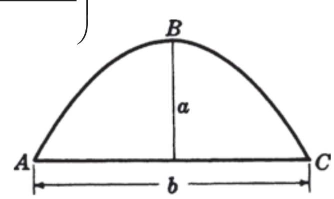


Fig. 7-14

Paralelepípedo retangular de comprimento a, altura b e largura c

7.26 Volume $= abc$

7.27 Área da superfície $= 2(ab + ac + bc)$

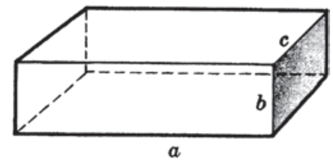


Fig. 7-15

Paralelepípedo de área de seção normal a e altura h

7.28 Volume $= Ah = Ab \text{ sen } \theta$

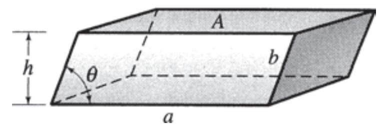


Fig. 7-16

Esfera de raio r

7.29 Volume $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

7.30 Área da superfície $= 4\pi r^2$

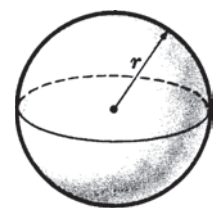


Fig. 7-17

Cilindro circular reto de raio r e altura h

7.31 Volume $= \pi r^2 h$

7.32 Área da superfície lateral $= 2\pi rh$

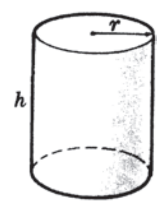


Fig. 7-18

Cilindro circular de raio r e altura inclinada l

7.33 Volume $= \pi r^2 h = \pi r^2 l \text{ sen } \theta$

7.34 Área da superfície lateral $= 2\pi rl = \dfrac{2\pi rh}{\text{sen}\,\theta} = 2\pi rh \text{ cosec}\,\theta$

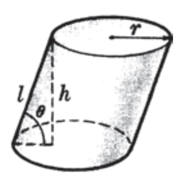


Fig. 7-19

Cilindro de área de seção normal *a* e altura inclinada *l*

7.35 Volume $= Ah = Al \operatorname{sen} \theta$

7.36 Área da superfície lateral $= pl = ph \operatorname{sen}\theta$

Observe que as Fórmulas 7.31 a 7.34 são casos especiais das Fórmulas 7.35 e 7.36.

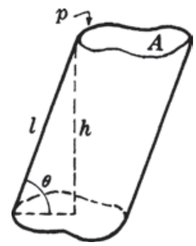


Fig. 7-20

Cone circular reto de raio *r* e altura *h*

7.37 Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

7.38 Área da superfície lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$

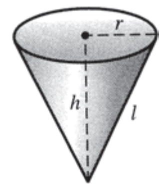


Fig. 7-21

Pirâmide de área de base *A* e altura *h*

7.39 Volume $= \frac{1}{3} Ah$

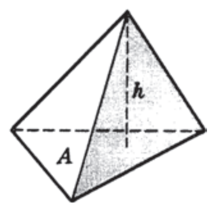


Fig. 7-22

Calota esférica de raio *r* e altura *h*

7.40 Volume (sombreado na Figura) $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

7.41 Área da superfície $= 2\pi rh$

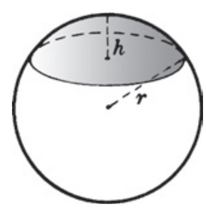


Fig. 7-23

Tronco de cone circular reto de raios *a, b* e altura *h*

7.42 Volume $= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

7.43 Área da superfície $= \pi(a + b)\sqrt{h^2 + (b - a)^2}$

$$= \pi(a + b)l$$

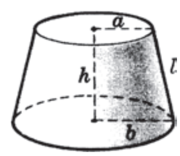


Fig. 7-24

Triângulo esférico de ângulos A, B, C na esfera de raio r

7.44 Área do triângulo $ABC = (A + B + C - \pi)r^2$

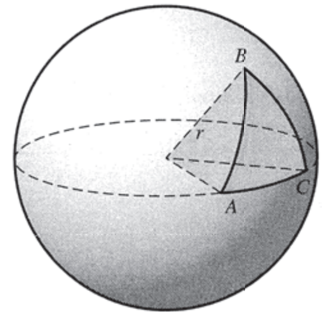


Fig. 7-25

Toro de raio interno a e raio externo b

7.45 Volume $= \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

7.46 Área da superfície $= \pi^2(b^2 - a^2)$

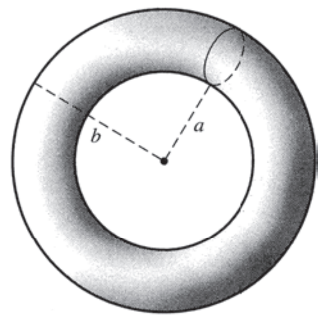


Fig. 7-26

Elipsoide de semieixos a, b, c

7.47 Volume $= \frac{4}{3}\pi abc$

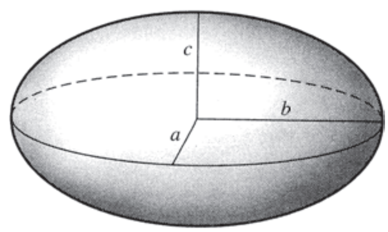


Fig. 7-27

Paraboloide de revolução

7.48 Volume $= \frac{1}{2}\pi b^2 a$

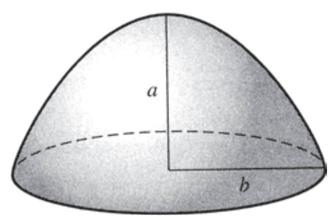


Fig. 7-28

Fórmulas da Geometria Analítica Plana

8

Distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

8.1 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

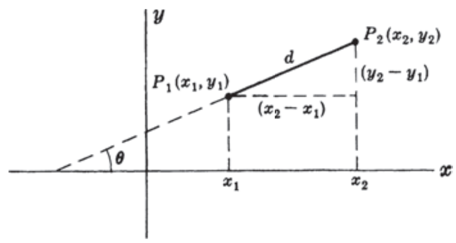


Fig. 8-1

Declividade m da reta ligando dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

8.2 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta$

Equação da reta ligando dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$

8.3 $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m \quad \text{ou} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$

8.4 $y = mx + b$

onde $b = y_1 - mx_1 = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$ é o *coeficiente linear* da reta, isto é, a ordenada do ponto de interseção com o eixo y.

Forma segmentária da equação da reta

8.5 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

onde $a \neq 0$ é a medida algébrica do segmento determinado pela reta no eixo x e $b \neq 0$ é a medida algébrica do segmento determinado pela reta no eixo y.

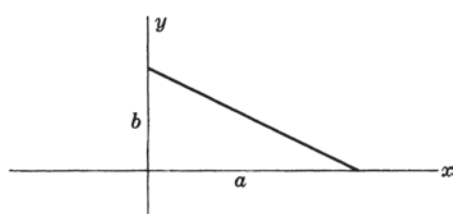


Fig. 8-2

Forma normal da equação da reta

8.6 $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$

onde p = distância perpendicular da origem O à reta
e α = ângulo de inclinação da perpendicular com o eixo x positivo.

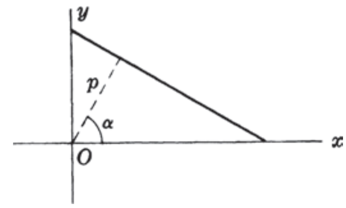


Fig. 8-3

Equação geral da reta

8.7 $Ax + By + C = 0$

Distância do ponto (x_1, y_1) à reta $Ax + By + C = 0$

8.8 $$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

onde o sinal é escolhido de tal maneira que a distância não seja negativa.

Ângulo ψ entre duas retas com declividades m_1 e m_2

8.9 $$\operatorname{tg} \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Retas são paralelas ou coincidentes se, e somente se, $m_1 = m_2$.
Retas são perpendiculares se, e somente se, $m_2 = -1/m_1$.

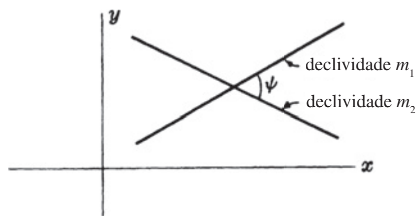


Fig. 8-4

Área do triângulo com vértices em (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

8.10 $$\text{Área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3)$$

onde o sinal é escolhido de tal maneira que a área não seja negativa.
Se a área for zero, os pontos são colineares.

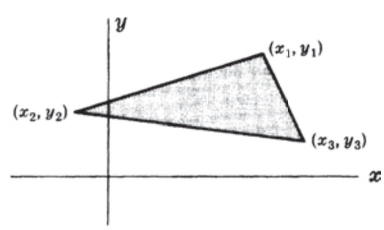


Fig. 8-5

Transformação de coordenadas envolvendo translação pura

8.11 $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

onde (x, y) são as antigas coordenadas, em relação ao sistema xy; (x', y') são as novas coordenadas, em relação ao sistema $x'y'$; e (x_0, y_0) são as coordenadas da nova origem O' em relação ao antigo sistema de coordenadas xy.

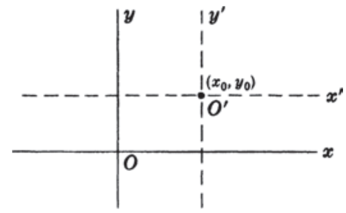


Fig. 8-6

Transformação de coordenadas envolvendo rotação pura

8.12 $\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = y\cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

onde as origens do antigo (xy) e do novo $(x'y')$ sistemas de coordenadas são as mesmas, porém o eixo x' faz um ângulo α com o eixo x positivo.

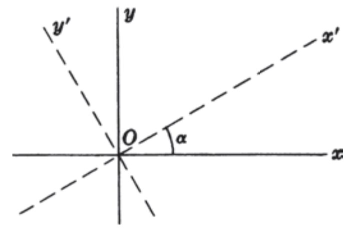


Fig. 8-7

Transformação de coordenadas envolvendo translação e rotação

8.13 $\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + x_0 \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + y_0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = (y - y_0)\cos\alpha - (x - x_0)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

onde a nova origem O' do sistema de coordenadas $x'y'$ tem coordenadas (x_0, y_0) relativas ao antigo sistema de coordenadas xy e o eixo x' faz um ângulo α com o eixo x positivo.

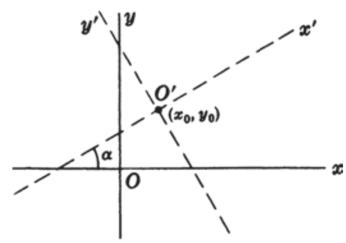


Fig. 8-8

Coordenadas polares (r, θ)

Um ponto P pode ser determinado pelas coordenadas retangulares (x, y) ou pelas coordenadas polares (r, θ) A transformação entre essas duas coordenadas se estabelece por:

8.14 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ ou $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}(y/x) \end{cases}$

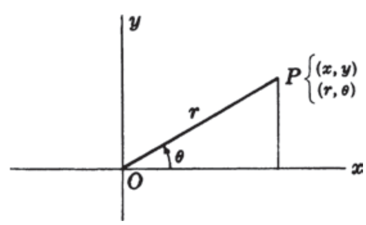


Fig. 8-9

Equação do círculo de raio R e centro em (x_0, y_0)

8.15 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

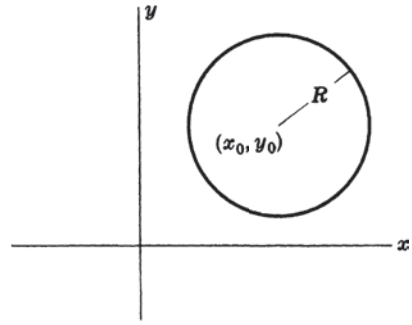


Fig. 8-10

Equação do círculo de raio R passando pela origem

8.16 $r = 2R\cos(\theta - \alpha)$
onde (r, θ) são as coordenadas polares de qualquer ponto no círculo e (R, α) são as coordenadas polares do centro do círculo.

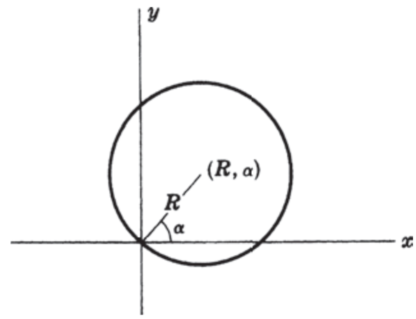


Fig. 8-11

Cônicas (elipse, parábola ou hipérbole)

Se um ponto P move-se de tal maneira que sua distância a um ponto fixo (denominado *foco*) dividida por sua distância a uma reta fixa (denominada *diretriz*) é uma constante ϵ (denominada *excentricidade*), então a curva descrita por P é denominada *cônica* (assim chamada por ser uma curva que pode ser obtida pela interseção de um plano com um cone em diferentes ângulos).

Se o foco é escolhido na origem O, se $OQ = p$ e $LM = D$ (ver Figura 8-12), então a equação de uma cônica em coordenadas polares (r, θ) é

8.17 $r = \dfrac{p}{1 - \epsilon\cos\theta} = \dfrac{\epsilon D}{1 - \epsilon\cos\theta}$

A cônica é
(i) uma elipse, se $\epsilon < 1$;
(ii) uma parábola, se $\epsilon = 1$;
(iii) uma hipérbole, se $\epsilon > 1$.

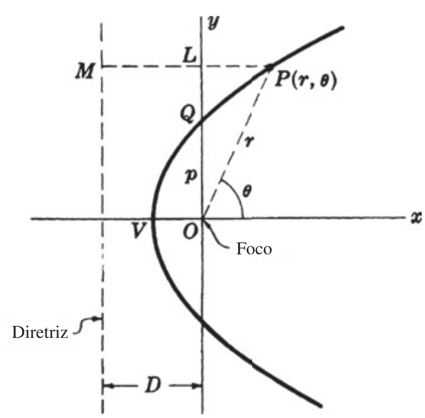


Fig. 8-12

Elipse com centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x

8.18 Comprimento do eixo maior $A'A = 2a$

8.19 Comprimento do eixo menor $B'B = 2b$

8.20 A distância do centro C ao foco F ou F' é

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

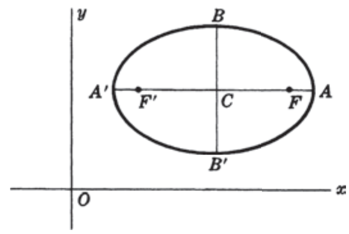


Fig. 8-13

8.21 Excentricidade $= \epsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

8.22 Equação em coordenadas retangulares:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

8.23 Equação em coordenadas polares se C estiver em O: $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$

8.24 Equação em coordenadas polares se C estiver no eixo x e F' estiver em O: $r = \dfrac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos\theta}$

8.25 Se P for qualquer ponto na elipse, $PF + PF' = 2a$.

Se o eixo maior for paralelo ao eixo y, troque x por y ou substitua θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [ou 90º – θ].

Parábola com eixo paralelo ao eixo x

Se o vértice está em $A(x_0, y_0)$ e a distância de A ao foco F é $a > 0$, a equação da parábola é

8.26 $(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$ se a parábola abrir para a direita [Fig. 8-14]

8.27 $(y - y_0)^2 = -4a(x - x_0)$ se a parábola abrir para a esquerda [Fig. 8-15]

Se o foco está na origem [Fig. 8-16], a equação em coordenadas polares é

8.28 $r = \dfrac{2a}{1 - \cos\theta}$

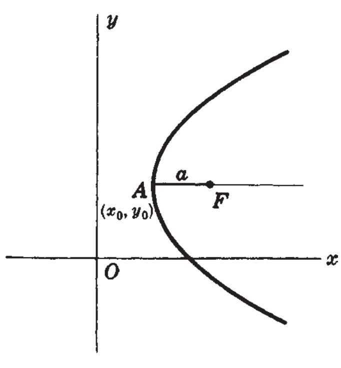


Fig. 8-14

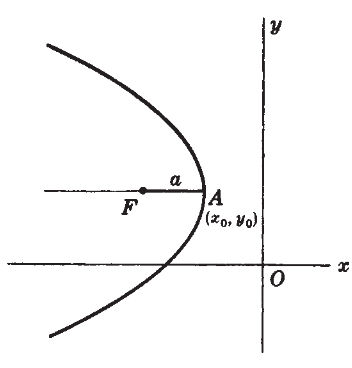


Fig. 8-15

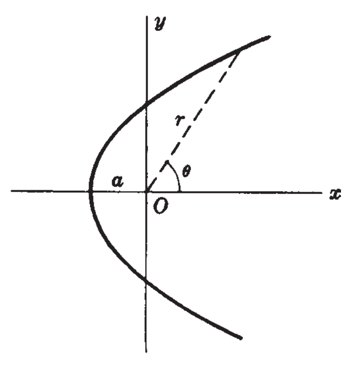


Fig. 8-16

No caso de o eixo ser paralelo ao eixo y, troque x por y, ou substitua θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [ou 90º – θ].

Hipérbole com centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x

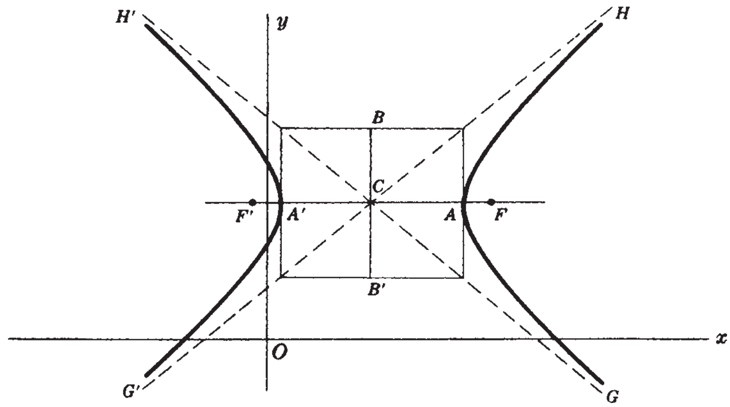


Fig. 8-17

8.29 Comprimento do eixo maior $A'A = 2a$

8.30 Comprimento do eixo menor $B'B = 2b$

8.31 Distância do centro C ao foco F ou $F' = c = \sqrt{a^2 + b^2}$

8.32 Excentricidade $\epsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

8.33 Equação em coordenadas retangulares: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

8.34 Declividades das assíntotas $G'H$ e $GH' = \pm\dfrac{b}{a}$

8.35 Equação em coordenadas polares se C estiver em O: $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta}$

8.36 Equação em coordenadas polares se C estiver no eixo x e F' estiver em O: $r = \dfrac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon\cos\theta}$

8.37 Se P for qualquer ponto na hipérbole, $PF - PF' = \pm 2a$ [dependendo do ramo].

Se o eixo maior for paralelo ao eixo y, troque x por y ou substitua θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ [ou $90° - \theta$].

Curvas Planas Especiais

9

Lemniscata

9.1 Equação em coordenadas polares

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

9.2 Equação em coordenadas retangulares

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

9.3 Ângulo entre AB' ou $A'B$ e eixo $x = 45°$

9.4 Área de um laço $= a^2$

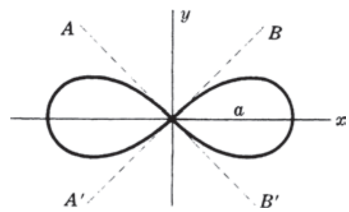


Fig. 9-1

Cicloide

9.5 Equação na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

9.6 Área sob um arco $= 3\pi a^2$

9.7 Comprimento de um arco $= 8a$

Esta é a curva descrita por um ponto P de um círculo de raio a que rola ao longo do eixo x.

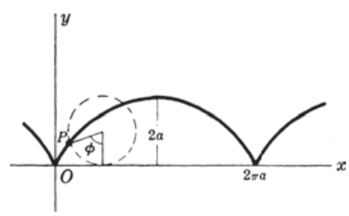


Fig. 9-2

Hipocicloide de quatro cúspides

9.8 Equação em coordenadas retangulares

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

9.9 Equação na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

9.10 Área limitada pela curva $= = \frac{3}{8}\pi a^2$

9.11 Comprimento total da curva $= 6a$

Esta é a curva descrita por um ponto P de um círculo de raio $a/4$ que rola pela parte interna de um círculo fixo de raio a.

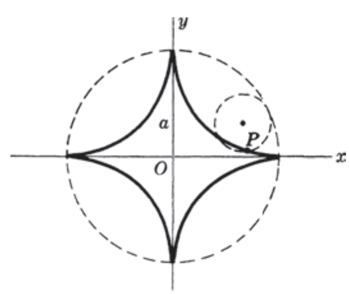


Fig. 9-3

Cardioide

9.12 Equação $r = 2a(1 + \cos\theta)$

9.13 Área limitada pela curva $= 6\pi a^2$

9.14 Comprimento total da curva $= 16a$

Esta é a curva descrita por um ponto P de um círculo de raio a que rola pela parte externa de um círculo fixo de raio a. A curva também é um caso especial do *limaçon de Pascal* [ver 9.32].

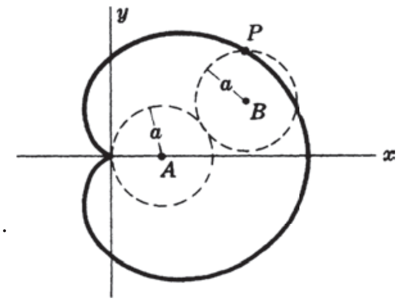


Fig. 9-4

Catenária

9.15 Equação $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \cosh\frac{x}{a}$

Esta é a curva determinada por uma corrente uniforme pesada suspendida verticalmente pelos pontos fixos A e B.

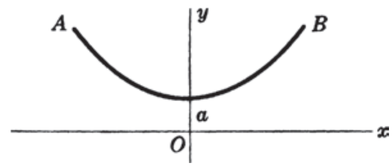


Fig. 9-5

Rosácea de três pétalas

9.16 Equação $r = a\cos 3\theta$

A equação $r = a \operatorname{sen} 3\theta$ descreve uma curva semelhante obtida pela rotação da curva da Fig. 9-6 no sentido horário por 30º ou $\pi/6$ radianos.

Em geral, $r = a\cos n\theta$ ou $r = a \operatorname{sen} n\theta$ tem n pétalas se n for ímpar.

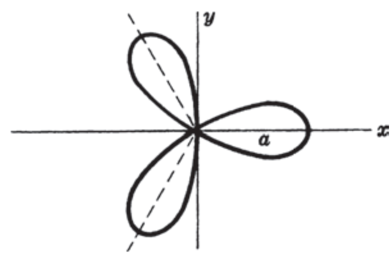


Fig. 9-6

Rosácea de quatro pétalas

9.17 Equação $r = a\cos 2\theta$

A equação $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ descreve uma curva semelhante obtida pela rotação da curva da Fig. 9-7 no sentido horário por 45º ou $\pi/4$ radianos.

Em geral, $r = a\cos n\theta$ ou $r = a \operatorname{sen} n\theta$ tem $2n$ pétalas se n for par.

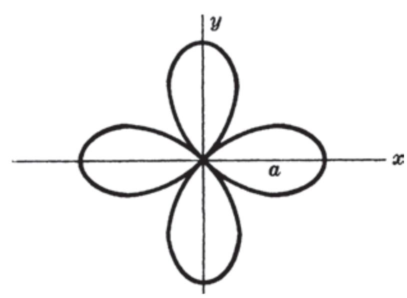


Fig. 9-7

Epicicloide geral

9.18 Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \\ y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \end{cases}$$

Esta é a curva descrita por um ponto P de um círculo de raio b que rola pela parte externa de um círculo fixo de raio a.

A cardioide [Fig. 9-4] é um caso especial de epicicloide.

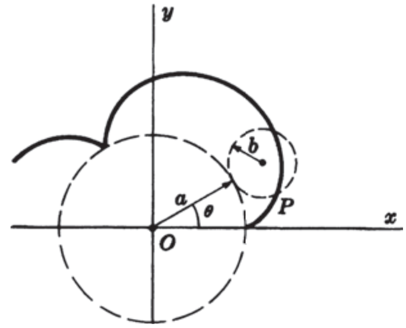


Fig. 9-8

Hipocicloide geral

9.19 Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\phi + b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \\ y = (a-b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \end{cases}$$

Esta é a curva descrita por um ponto P de um círculo de raio b que rola pela parte interna de um círculo fixo de raio a.

Se $b = a/4$, a curva é a hipocicloide de quatro cúspides da Fig. 9-3.

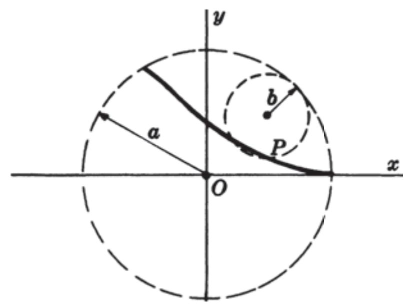


Fig. 9-9

Trocoide

9.20 Equações paramétricas $\begin{cases} x = a\phi - b\operatorname{sen}\phi \\ y = a - b\cos\phi \end{cases}$

Esta é a curva descrita por um ponto P a uma distância b do centro de um círculo de raio a que rola pelo eixo x.

Se $b < a$, a curva é como a mostrada na Fig. 9-10 e é chamada de *cicloide encurtada.*

Se $b > a$, a curva é como a mostrada na Fig. 9-11 e é chamada de *cicloide prolongada.*

Se $b = a$, a curva é o cicloide da Fig. 9-2.

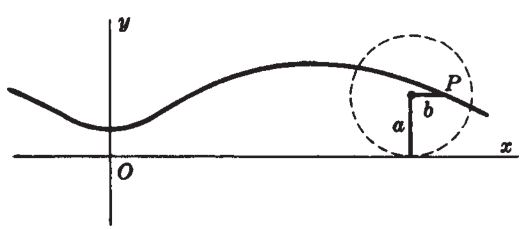


Fig. 9-10

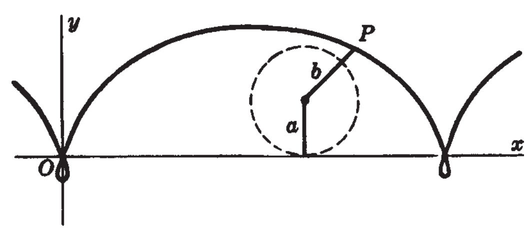


Fig. 9-11

Tractriz

9.21 Equações paramétricas $\begin{cases} x = a(\ln \cot \frac{1}{2}\phi - \cos\phi) \\ y = a \operatorname{sen}\phi \end{cases}$

Esta é a curva descrita pelo ponto final P de um cordão esticado PQ de comprimento a quando a outra extremidade Q é puxada ao longo do eixo x.

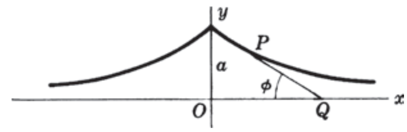


Fig. 9-12

Curva de Agnesi

9.22 Equação em coordenadas retangulares $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$

9.23 Equações paramétricas $\begin{cases} x = 2a \operatorname{cotg}\theta \\ y = a(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$

Na Fig. 9-13, a reta variável AO intersecta $y = 2a$ e o círculo de raio a com centro $(0, a)$ em A e B, respectivamente. Qualquer ponto P da curva é obtido pela interseção das retas paralelas aos eixos x e y por B e A, respectivamente.

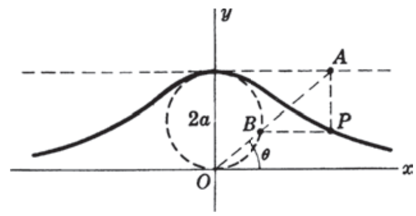


Fig. 9-13

Fólio de Descartes

9.24 Equação em coordenadas retangulares

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

9.25 Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

9.26 Área do laço $= \dfrac{3}{2}a^2$

9.27 Equação da assíntota $x + y + a = 0$

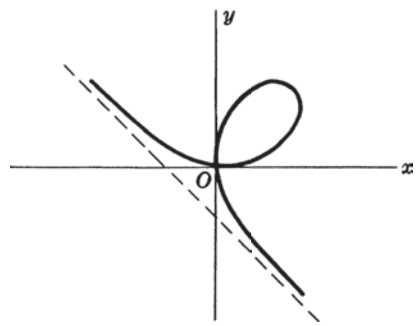


Fig. 9-14

Evolvente de um círculo

9.28 Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a(\cos\phi + \phi \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi\cos\phi) \end{cases}$$

Esta é a curva descrita pelo ponto final P de um cordão que é mantido esticado enquanto é desenrolado de um círculo de raio a.

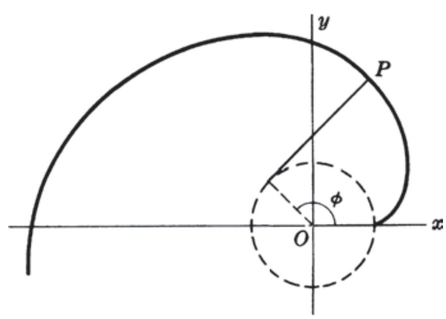


Fig. 9-15

Evoluta de uma elipse

9.29 Equação em coordenadas retangulares

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

9.30 Equações paramétricas

$$\begin{cases} ax = (a^2 - b^2)\cos^3\theta \\ by = (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^3\,\theta \end{cases}$$

Esta curva é a *envoltória das normais* da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, mostrada tracejada na Fig 9-16.

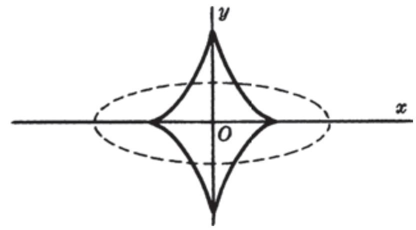


Fig. 9-16

Ovais de Cassini

9.31 Equação polar $r^4 + a^4 - 2a^2r^2 \cos 2\theta = b^4$

Esta é a curva descrita por um ponto P tal que o produto das distâncias a dois pontos fixos (e distantes $2a$ entre si) é uma constante b^2.

A curva é como mostrada nas Figs. 9-17 ou 9-18, de acordo com $b < a$ ou $b > a$, respectivamente.

Se $b = a$, a curva é uma *lemniscata* [Fig. 9-1].

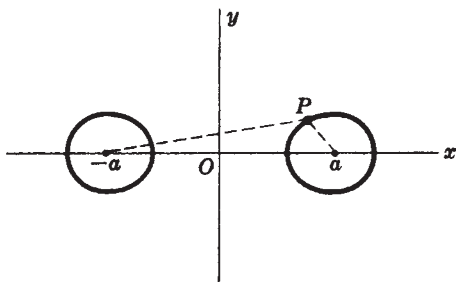


Fig. 9-17

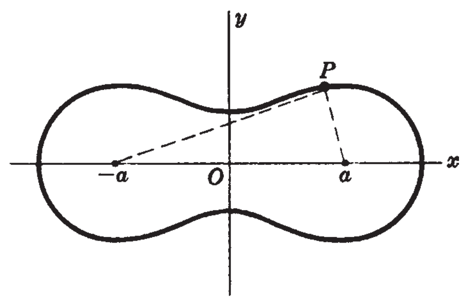


Fig. 9-18

Limaçon de Pascal

9.32 Equação polar $r = b + a \cos\theta$

Seja OQ uma reta ligando o ponto na origem O a qualquer ponto Q de um círculo de diâmetro a passando por O. Então a curva é o lugar geométrico dos pontos P tais que $PQ = b$.

A curva é como mostrada nas Figs. 9-19 ou 9-20, de acordo com $2a > b > a$ ou $b < a$, respectivamente. Se $b = a$, a curva é *cardioide* [Fig. 9-4]. Se $b \geqq 2a$, a curva é convexa.

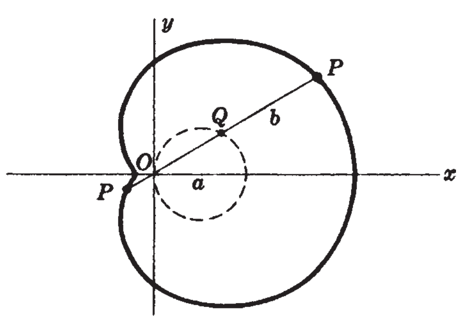


Fig. 9-19

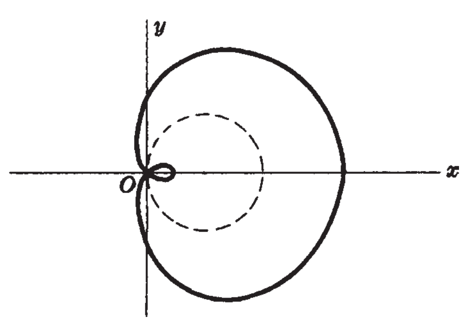


Fig. 9-20

Cissoide de Diocles

9.33 Equação em coordenadas retangulares

$$y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$$

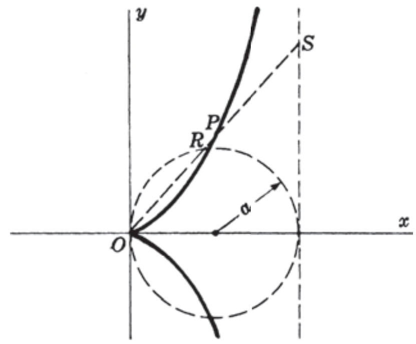


Fig. 9-21

9.34 Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2a\,\text{sen}^2\,\theta \\ y = \dfrac{2a\,\text{sen}^3\,\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

Esta é a curva descrita por um ponto P tal que a distância OP = distância RS. Isto é usado no problema da *duplicação do cubo,* isto é, o da construção de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado.

Espiral de Arquimedes

9.35 Equação polar $r = a\theta$

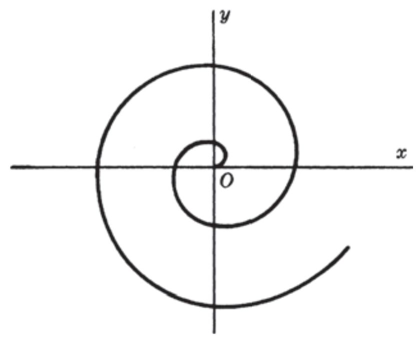


Fig. 9-22

Fórmulas da Geometria Analítica Espacial

10

Distância d entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$

10.1 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

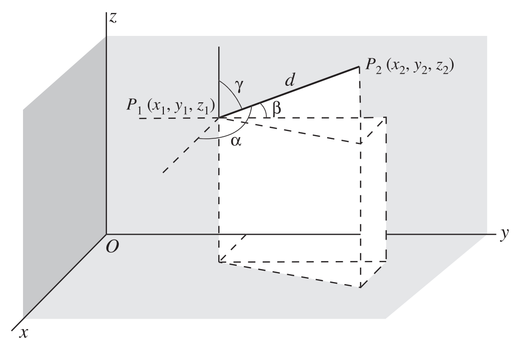


Fig. 10-1

Cossenos diretores de uma reta ligando os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$

10.2 $l = \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{d}, \quad m = \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{d}, \quad n = \cos\gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{d}$

onde α, β, γ são os ângulos que a linha P_1P_2 faz com os eixos x, y e z, respectivamente, e d é dado por 10.1 [ver Fig. 10-1].

Relação entre os cossenos diretores

10.3 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{ou} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Números diretores

Os números L, M e N, os quais são proporcionais aos cossenos diretores l, m e n, são chamados de *números diretores*. A relação entre eles é dada por

10.4 $l = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad m = \dfrac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad n = \dfrac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$

Equações da reta ligando $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ na forma padrão

10.5 $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \text{ou} \quad \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

Estas também são válidas se l, m e n forem substituídos por L, M e N, respectivamente.

Equações da reta ligando $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ na forma paramétrica

10.6 $x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt$

Estas também são válidas se l, m e n forem substituídos por L, M e N, respectivamente.

Ângulo ϕ entre duas retas com cossenos diretores l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2

10.7 $\cos\phi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

Equação geral do plano

10.8 $Ax + By + Cz + D = 0$ [A, B, C, D são constantes]

Equação do plano passando pelos pontos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)

10.9 $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

10.10 $$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1) + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}(y-y_1) + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1) = 0$$

Equação do plano na forma segmentária

10.11 $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

onde a, b e c são as medidas algébricas dos segmentos determinados nos eixos x, y e z, respectivamente.

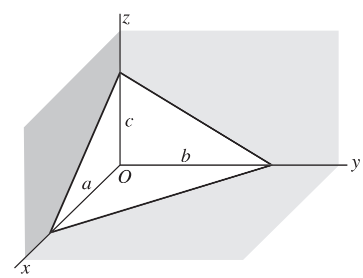


Fig. 10-2

Equações da reta por (x_0, y_0, z_0) e perpendicular ao plano $Ax + By + Cz + D = 0$

10.12 $$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \quad \text{ou} \quad x = x_0 + At, \; y = y_0 + Bt, \; z = z_0 + Ct$$

Observe que os números diretores da reta perpendicular ao plano $Ax + By + Cz + D = 0$ são A, B e C.

Distância do ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $Ax + By + Cz + D = 0$

10.13 $$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

onde o sinal é escolhido de tal maneira que a distância não seja negativa.

Forma normal da equação do plano

10.14 $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$

onde p = distância perpendicular, a partir de O, ao plano em P e α, β, γ são os ângulos entre OP e eixos positivos x, y e z.

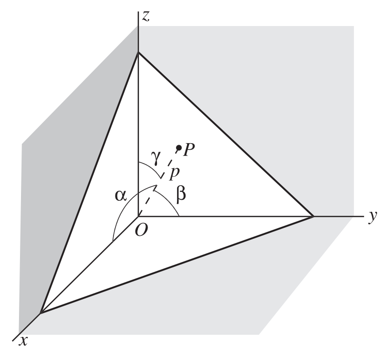


Fig. 10-3

Transformação de coordenadas envolvendo translação pura

10.15 $$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

onde (x, y, z) são as antigas coordenadas [isto é, coordenadas em relação ao sistema xyz]; (x', y', z') são as novas coordenadas [em relação ao sistema $x'y'z'$] e (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas da nova origem O' em relação ao antigo sistema de coordenadas xyz.

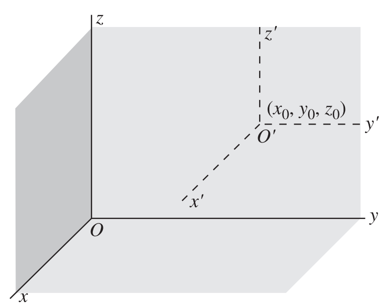


Fig. 10-4

Transformação de coordenadas envolvendo rotação pura

10.16 $$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{cases}$$

ou $$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z \end{cases}$$

onde as origens dos sistemas xyz e $x'y'z'$ são as mesmas e l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 são os cossenos diretores dos eixos x', y', z' relativos aos eixos x, y e z, respectivamente.

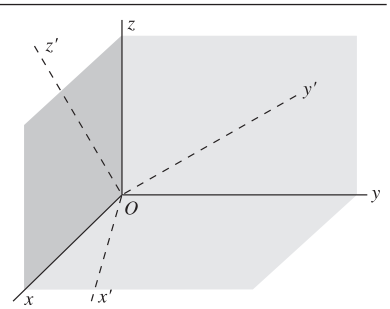


Fig. 10-5

Transformação de coordenadas envolvendo translação e rotação

10.17 $$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + x_0 \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + y_0 \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + z_0 \end{cases}$$

ou $$\begin{cases} x' = l_1(x-x_0) + m_1(y-y_0) + n_1(z-z_0) \\ y' = l_2(x-x_0) + m_2(y-y_0) + n_2(z-z_0) \\ z' = l_3(x-x_0) + m_3(y-y_0) + n_3(z-z_0) \end{cases}$$

onde a origem O' do sistema $x'y'z'$ tem coordenadas (x_0, y_0, z_0) relativas ao sistema xyz e

$$l_1, m_1, n_1;\ l_2, m_2, n_2;\ l_3, m_3, n_3$$

são os cossenos diretores dos eixos $x'y'z'$ relativos aos eixos x, y e z, respectivamente.

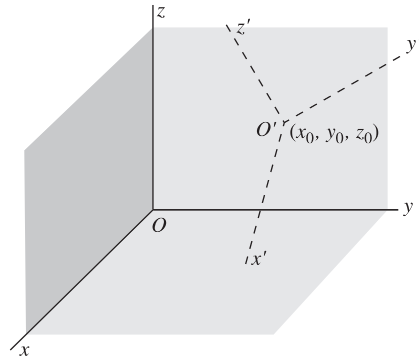


Fig. 10-6

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

Um ponto P pode ser determinado pelas coordenadas cilíndricas (r, θ , z) [ver Fig. 10-7] bem como por coordenadas retangulares (x, y, z).

A transformação entre essas coordenadas é

10.18 $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{arctg}\,(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

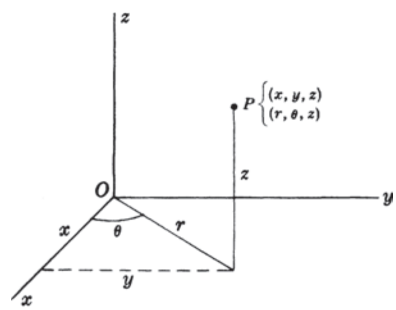


Fig. 10-7

Coordenadas esféricas (r, θ , ϕ)

Um ponto P pode ser determinado por coordenadas esféricas (r, θ , ϕ) [ver Fig. 10-8] bem como por coordenadas retangulares (x, y, z).

A transformação entre essas coordenadas é

10.19 $$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

ou $$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \text{arctg}\,(y/x) \\ \theta = \text{arccos}\,(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \end{cases}$$

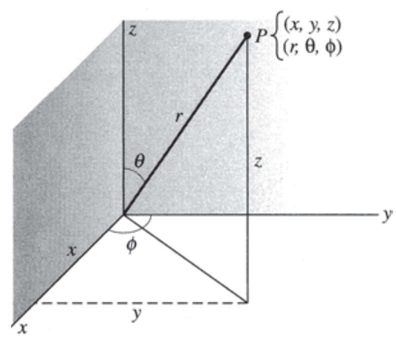


Fig. 10-8

Equação da esfera em coordenadas retangulares

10.20 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

onde a esfera tem centro (x_0, y_0, z_0) e raio R.

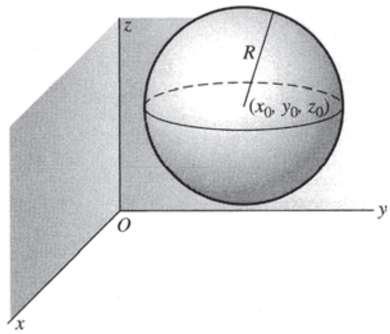


Fig. 10-9

Equação da esfera em coordenadas cilíndricas

10.21 $r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

onde a esfera tem centro (r_0, θ_0, z_0) em coordenadas cilíndricas e raio R.
Se o centro está na origem, a equação é

10.22 $r^2 + z^2 = R^2$

Equação da esfera em coordenadas esféricas

10.23 $r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\theta_0\cos(\phi - \phi_0) = R^2$

onde a esfera tem centro (r_0, θ_0, ϕ_0) em coordenadas esféricas e raio R.
Se o centro está na origem, a equação é

10.24 $r = R$

Equação do elipsoide com centro (x_0, y_0, z_0) e semieixos a, b, c

10.25 $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

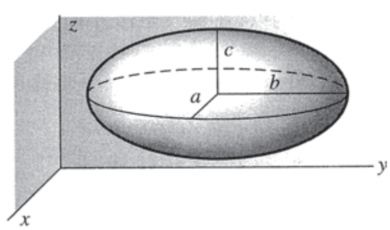


Fig. 10-10

Cilindro elíptico com eixo no eixo z

10.26 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

onde a e b são semieixos do corte transversal elíptico.
Se $b = a$, isto torna-se um cilindro circular de raio a.

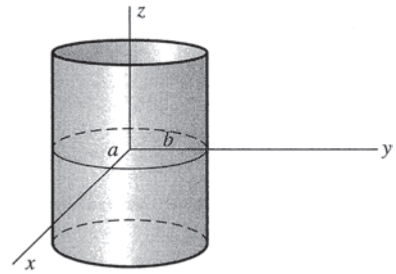


Fig. 10-11

Cone elíptico com eixo no eixo z

10.27 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

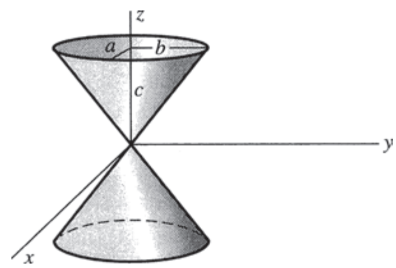


Fig. 10-12

Hiperboloide de uma folha

10.28 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

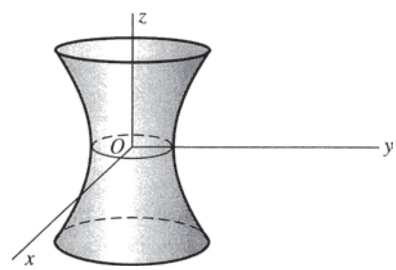


Fig. 10-13

Hiperboloide de duas folhas

10.29 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Observe a orientação dos eixos na Fig. 10-14.

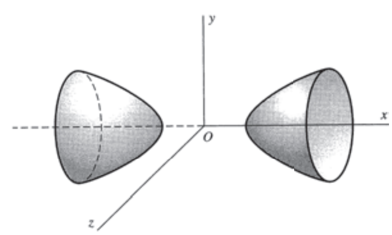


Fig. 10-14

Paraboloide elíptico

10.30 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$

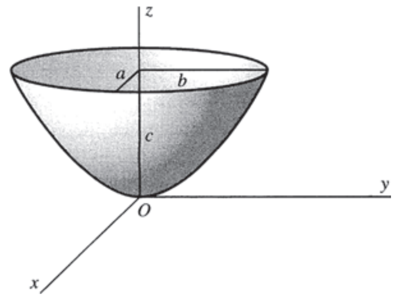


Fig. 10-15

Paraboloide hiperbólico

10.31 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$

Observe a orientação dos eixos na Fig. 10-16.

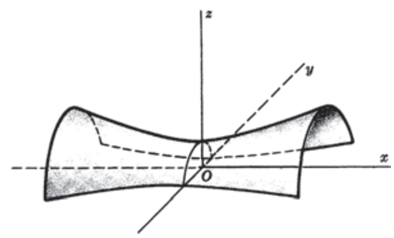


Fig. 10-16

11 Momentos de Inércia Especiais

A tabela abaixo mostra os momentos de inércia de vários corpos rígidos de massa M. Em todos os casos, supõe-se que o corpo tem densidade uniforme, isto é, constante.

	Tipo de corpo rígido	Momento de inércia
11.1	Vara delgada de comprimento a	
(a)	em torno do eixo perpendicular à vara, através do centro da massa	$\frac{1}{12}Ma^2$
(b)	em torno do eixo perpendicular à vara, através de uma extremidade	$\frac{1}{3}Ma^2$
11.2	Paralelepípedo retangular de lados a, b e c	
(a)	em torno do eixo paralelo a c e através do centro da face ab	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
(b)	em torno do eixo através do centro da face bc e paralelo a c	$\frac{1}{12}M(4a^2+b^2)$
11.3	Placa retangular delgada de lados a, b	
(a)	em torno do eixo perpendicular à placa, através do centro	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
(b)	em torno do eixo paralelo ao lado b, através do centro	$\frac{1}{12}Ma^2$
11.4	Cilindro circular de raio a e altura h	
(a)	em torno do eixo do cilindro	$\frac{1}{2}Ma^2$
(b)	em torno do eixo através do centro da massa e perpendicular ao eixo cilíndrico	$\frac{1}{12}M(h^2+3a^2)$
(c)	em torno do eixo coincidente com diâmetro em uma extremidade	$\frac{1}{12}M(4h^2+3a^2)$
11.5	Cilindro circular oco de raio externo a, raio interno b e altura h	
(a)	em torno do eixo do cilindro	$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$
(b)	em torno do eixo através do centro da massa e perpendicular ao eixo cilíndrico	$\frac{1}{12}M(3a^2+3b^2+h^2)$
(c)	em torno do eixo coincidente com diâmetro em uma extremidade	$\frac{1}{12}M(3a^2+3b^2+4h^2)$
11.6	Placa circular de raio a	
(a)	em torno do eixo perpendicular à placa, através do centro	$\frac{1}{2}Ma^2$
(b)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{1}{4}Ma^2$

11.7	Placa circular oca ou anel com raio externo a e raio interno b	
(a)	em torno do eixo perpendicular ao plano da placa, através do centro	$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$
(b)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{1}{4}M(a^2+b^2)$
11.8	Anel circular delgado de raio a	
(a)	em torno do eixo perpendicular ao plano do anel, através do centro	Ma^2
(b)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{1}{2}Ma^2$
11.9	Esfera de raio a	
(a)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{2}{5}Ma^2$
(b)	em torno do eixo tangente à superfície	$\frac{7}{5}Ma^2$
11.10	Esfera oca de raio externo a e raio interno b	
(a)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{2}{5}M(a^5-b^5)/(a^3-b^3)$
(b)	em torno do eixo tangente à superfície	$\frac{2}{5}M(a^5-b^5)/(a^3-b^3)+Ma^2$
11.11	Casca esférica de raio a	
(a)	em torno do eixo coincidente com um diâmetro	$\frac{2}{3}Ma^2$
(b)	em torno do eixo tangente à superfície	$\frac{5}{3}Ma^2$
11.12	Elipsoide de semi-eixos a, b e c	
(a)	em torno do eixo coincidente com o semieixo c	$\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$
(b)	em torno do eixo tangente à superfície, paralelo ao semieixo c e a uma distância a do centro	$\frac{1}{5}M(6a^2+b^2)$
11.13	Cone circular de raio a e altura h	
(a)	em torno do eixo do cone	$\frac{3}{10}Ma^2$
(b)	em torno do eixo através do vértice e perpendicular ao eixo	$\frac{3}{20}M(a^2+4h^2)$
(c)	em torno do eixo através do centro de massa e perpendicular ao eixo	$\frac{3}{80}M(4a^2+h^2)$
11.14	Toro com raio externo a e raio interno b	
(a)	em torno do eixo através do centro de massa e perpendicular ao plano de toro	$\frac{1}{4}M(7a^2-6ab+3b^2)$
(b)	em torno do eixo através do centro de massa e no plano de toro	$\frac{1}{4}M(9a^2-10ab+5b^2)$

Seção III: Funções Transcendentes Elementares

12 Funções Trigonométricas

Definição das funções trigonométricas para um triângulo retângulo

O triângulo *ABC* tem um ângulo reto (90º) em *C* e lados de comprimento *a, b* e *c*. As funções trigonométricas do ângulo *A* são definidas como segue:

12.1 *seno de A* = sen $A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}$

12.2 *cosseno de A* = cos $A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

12.3 *tangente de A* = tg $A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{oposto}}{\text{adjacente}}$

12.4 *cotangente de A* = cotg $A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{adjacente}}{\text{oposto}}$

12.5 *secante de A* = sec $A = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{adjacente}}$

12.6 *cossecante de A* = cosec $A = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{oposto}}$

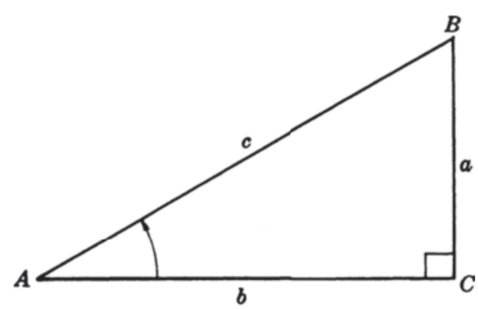


Fig. 12-1

Extensões a ângulos que podem ser maiores do que 90°

Considere um sistema de coordenadas *xy* [ver Figuras 12-2 e 12-3]. O ponto *P* no plano *xy* tem coordenadas (*x*, *y*), onde *x* é considerado como positivo ao longo de *OX* e negativo ao longo de *OX´*, enquanto *y* é considerado positivo ao longo de *OY* e negativo ao longo de *OY´*. A distância da origem *O* ao ponto *P* é positiva e denotada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. O ângulo *A* descrito no sentido *anti-horário* a partir de *OX* é considerado *positivo*. Se for descrito no sentido *horário* a partir de *OX* é considerado *negativo*. Denominamos *X´OX* e *Y´OY* os eixos *x* e *y*, respectivamente.

Os vários quadrantes são denotados por I, II, III e IV e são denominados primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes, respectivamente. Na Fig. 12-2, por exemplo, o ângulo *A* está no segundo quadrante, enquanto que na Fig. 12-3, o ângulo *A* está no terceiro quadrante.

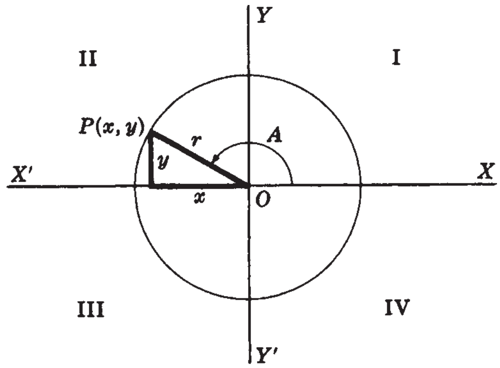


Fig. 12-2

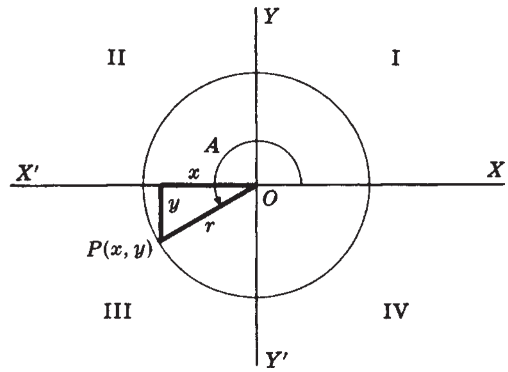


Fig. 12-3

Para um ângulo A em qualquer quadrante, as funções trigonométricas de A são definidas como segue.

12.7 $\operatorname{sen} A = y/r$

12.8 $\cos A = x/r$

12.9 $\operatorname{tg} A = y/x$

12.10 $\operatorname{cotg} A = x/y$

12.11 $\sec A = r/x$

12.12 $\operatorname{cosec} A = r/y$

Relação entre graus e radianos

O *radiano* é o ângulo θ subentendido no centro O de um círculo por um arco MN igual ao raio r.

Como 2π radianos = 360º, temos

12.13 1 radiano $180°/\pi = 57{,}29577\ 95130\ 8232\ \ldots°$

12.14 $1° = \pi/180$ radianos $= 0{,}01745\ 32925\ 19943\ 29576\ 92\ \ldots$ radianos

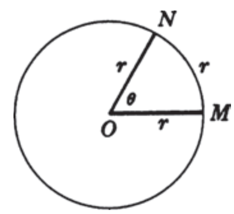


Fig. 12-4

Relações entre as funções trigonométricas

12.15 $$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

12.16 $$\operatorname{cotg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

12.17 $$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

12.18 $$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

12.19 $$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

12.20 $$\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1$$

12.21 $$\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cotg}^2 A = 1$$

Sinais e variações das funções trigonométricas

Quadrante	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
I	+ 0 a 1	+ 1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	+ 1 a ∞	+ ∞ a 1
II	+ 1 a 0	– 0 a –1	– –∞ a 0	– 0 a –∞	– –∞ a –1	+ 1 a ∞
III	– 0 a –1	– –1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	– –1 a –∞	– –∞ a –1
IV	– –1 a 0	+ 0 a 1	– –∞ a 0	– 0 a –∞	+ ∞ a 1	– –1 a –∞

Valores exatos para funções trigonométricas de vários ângulos

Ângulo A em graus	Ângulo A em radianos	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
270°	$3\pi/2$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

Para outros ângulos, ver Tabelas 2, 3 e 4.

Gráficos das funções trigonométricas

Em cada gráfico, x está em radianos.

12.22 $y = \text{sen } x$

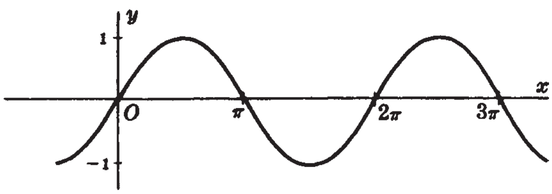


Fig. 12-5

12.23 $y = \cos x$

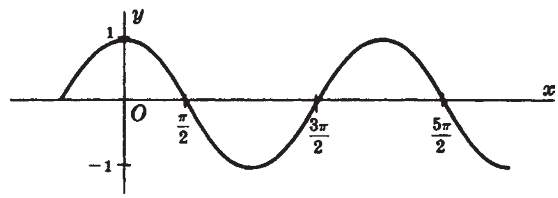


Fig. 12-6

12.24 $y = \text{tg } x$

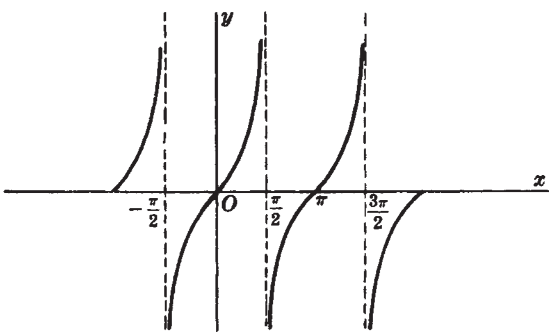


Fig. 12-7

12.25 $y = \text{cotg } x$

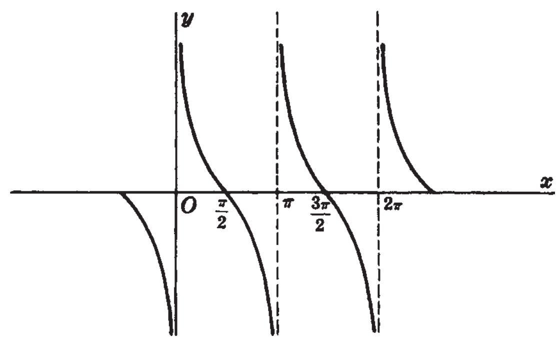


Fig. 12-8

12.26 $y = \sec x$

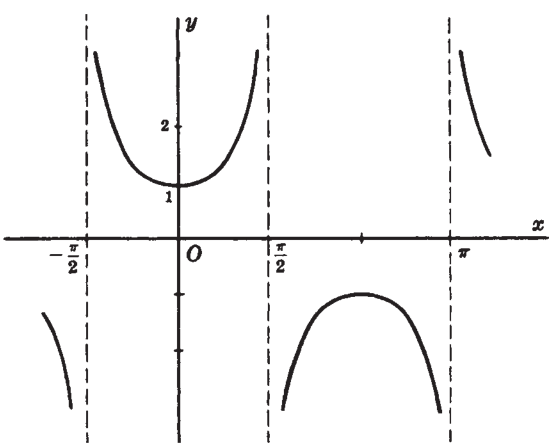


Fig. 12-9

12.27 $y = \text{cosec } x$

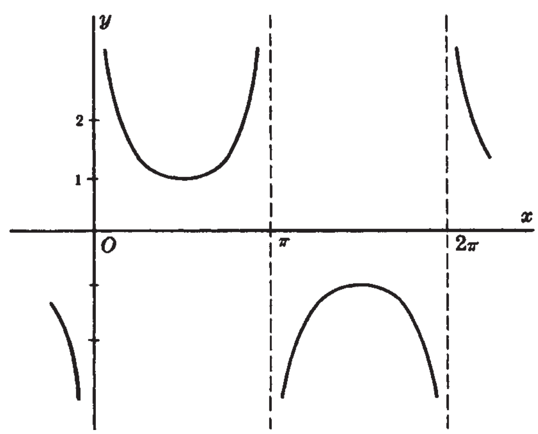


Fig. 12-10

Funções de ângulos negativos

12.28 $\text{sen }(-A) = -\text{sen } A$

12.29 $\cos(-A) = \cos A$

12.30 $\text{tg }(-A) = -\text{tg } A$

12.31 $\text{cosec }(-A) = -\text{cosec } A$

12.32 $\sec(-A) = \sec A$

12.33 $\text{cotg }(-A) = -\text{cotg } A$

Fórmulas de adição

12.34 $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

12.35 $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

12.36 $\operatorname{tg}(A \pm B) = \dfrac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$

12.37 $\operatorname{cotg}(A \pm B) = \dfrac{\operatorname{cotg} A \cot B \mp 1}{\operatorname{cotg} B \pm \operatorname{cotg} A}$

Funções de ângulos em todos os quadrantes em termos de ângulos do quadrante I

	$-A$	$90° \pm A$ $\frac{\pi}{2} \pm A$	$180° \pm A$ $\pi \pm A$	$270° \pm A$ $\frac{3\pi}{2} \pm A$	$k(360°) \pm A$ $2k\pi \pm A$ $k =$ inteiro
sen	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$
cos	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$\cos A$
tg	$-\operatorname{tg} A$	$\mp \operatorname{cotg} A$	$\pm \operatorname{tg} A$	$\mp \operatorname{cotg} A$	$\pm \operatorname{tg} A$
cosec	$-\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\mp \operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$\pm \operatorname{cosec} A$
sec	$\sec A$	$\mp \operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$\pm \operatorname{cosec} A$	$\sec A$
cotg	$-\operatorname{cotg} A$	$\mp \operatorname{tg} A$	$\pm \operatorname{cotg} A$	$\mp \operatorname{tg} A$	$\pm \operatorname{cotg} A$

Relações entre funções de ângulos no quadrante I

	$\operatorname{sen} A = u$	$\cos A = u$	$\operatorname{tg} A = u$	$\operatorname{cotg} A = u$	$\sec A = u$	$\operatorname{cosec} A = u$
$\operatorname{sen} A$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	$1/u$
$\cos A$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$1/\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}/u$
$\operatorname{tg} A$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$1/\sqrt{u^2-1}$
$\operatorname{cotg} A$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{u^2-1}$
$\sec A$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	u	$u/\sqrt{u^2-1}$
$\operatorname{cosec} A$	$1/u$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	u

Para extensões a outros quadrantes, use sinais apropriados, como os dados na tabela anterior.

Fórmulas de ângulo duplo

12.38 $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$

12.39 $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1$

12.40 $\operatorname{tg} 2A = \dfrac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$

Fórmulas de ângulo metade

12.41 $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} +\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante I ou II} \\ -\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante III ou IV} \end{bmatrix}$

12.42 $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} +\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante I ou IV} \\ -\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante II ou III} \end{bmatrix}$

12.43 $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ $\begin{bmatrix} +\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante I ou III} \\ -\text{ se } A/2 \text{ está no quandrante II ou IV} \end{bmatrix}$

$$= \frac{\operatorname{sen} A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg} A$$

Fórmulas de ângulo múltiplo

12.44 $\operatorname{sen} 3A = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$

12.45 $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

12.46 $\operatorname{tg} 3A = \dfrac{3\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}$

12.47 $\operatorname{sen} 4A = 4 \operatorname{sen} A \cos A - 8 \operatorname{sen}^3 A \cos A$

12.48 $\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$

12.49 $\operatorname{tg} 4A = \dfrac{4\operatorname{tg} A - 4\operatorname{tg}^3 A}{1 - 6\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^4 A}$

12.50 $\operatorname{sen} 5A = 5 \operatorname{sen} A - 20 \operatorname{sen}^3 A + 16 \operatorname{sen}^5 A$

12.51 $\cos 5A = 16 \cos^5 A - 20 \cos^3 A + 5 \cos A$

12.52 $\operatorname{tg} 5A = \dfrac{\operatorname{tg}^5 A - 10\operatorname{tg}^3 A + 5\operatorname{tg} A}{1 - 10\operatorname{tg}^2 A + 5\operatorname{tg}^4 A}$

Ver também as Fórmulas 12.68 e 12.69.

Potências de funções trigonométricas

12.53 $\operatorname{sen}^2 A = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2A$

12.54 $\cos^2 A = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2A$

12.55 $\operatorname{sen}^3 A = \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} A - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 3A$

12.56 $\cos^3 A = \tfrac{3}{4}\cos A + \tfrac{1}{4}\cos 3A$

12.57 $\operatorname{sen}^4 A = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2A + \tfrac{1}{8}\cos 4A$

12.58 $\cos^4 A = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2}\cos 2A + \tfrac{1}{8}\cos 4A$

12.59 $\operatorname{sen}^5 A = \tfrac{5}{8}\operatorname{sen} A - \tfrac{5}{16}\operatorname{sen} 3A + \tfrac{1}{16}\operatorname{sen} 5A$

12.60 $\cos^5 A = \tfrac{5}{8}\cos A + \tfrac{5}{16}\cos 3A + \tfrac{1}{16}\cos 5A$

Ver também as Fórmulas 12.70 a 12.73.

Soma, diferença e produto de funções trigonométricas

12.61 $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$

12.62 $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)$

12.63 $\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$

12.64 $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(B-A)$

12.65 $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A-B)\}$

12.66 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$

12.67 $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\}$

Fórmulas gerais

12.68 $$\operatorname{sen} nA = \operatorname{sen} A\left\{(2\cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1}(2\cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\cos A)^{n-5} - \cdots\right\}$$

12.69 $$\cos nA = \frac{1}{2}\left\{(2\cos A)^{n} - \frac{n}{1}(2\cos A)^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}(2\cos A)^{n-4} - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}(2\cos A)^{n-6} + \cdots\right\}$$

12.70 $$\operatorname{sen}^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\operatorname{sen}(2n-1)A - \binom{2n-1}{1}\operatorname{sen}(2n-3)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\operatorname{sen} A\right\}$$

12.71 $$\cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\cos(2n-1)A + \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)A + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}\cos A\right\}$$

12.72 $$\operatorname{sen}^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^{n}}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA - \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

12.73 $$\cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots + \binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

Funções trigonométricas inversas

Se $x = \operatorname{sen} y$, então $y = \operatorname{arc\,sen} x$, isto é, o *ângulo cujo seno é* x ou o *arco seno de* x é uma função plurívoca de x que é uma coleção de funções bem definidas denominadas *ramos* da função inversa do seno. Analogamente, as outras funções trigonométricas inversas também são plurívocas.

Para muitos propósitos, é requerido um ramo particular. Este é dito o *ramo principal* e os valores deste ramo são denominados *ramos* ou *valores principais* da função inversa.

Valores principais das funções trigonométricas inversas

Valores principais para $x \geqq 0$	Valores principais para $x < 0$
$0 \leqq \operatorname{arc\,sen} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \operatorname{arc\,sen} x < 0$
$0 \leqq \operatorname{arc\,cos} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \operatorname{arc\,cos} x \leqq \pi$
$0 \leqq \operatorname{arc\,tg} x < \pi/2$	$-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} x < 0$
$0 < \operatorname{arc\,cotg} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \operatorname{arc\,cotg} x < \pi$
$0 \leqq \operatorname{arc\,sec} x < \pi/2$	$\pi/2 < \operatorname{arc\,sec} x \leqq \pi$
$0 < \operatorname{arc\,cosec} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \operatorname{arc\,cosec} x < 0$

Relações entre funções trigonométricas inversas

Em todos os casos, supõe-se que são usados os valores principais.

12.74 arc sen x + arc cos x = $\pi/2$

12.75 arc tan x + arc cotg x = $\pi/2$

12.76 arc sec x + arc cosec x = $\pi/2$

12.77 arc cosec x = arc sen$(1/x)$

12.78 arc sec x = arc cos$(1/x)$

12.79 arc cortg x = arc tg$(1/x)$

12.80 arc sen$(-x)$ = –arc sen x

12.81 arc cos$(-x)$ = π –arc cos x

12.82 arc tg $(-x)$ = –arc tg x

12.83 arc cotg $(-x)$ = π –arc cotg x

12.84 arc sec$(-x)$ = –arc sec x

12.85 arc cosec$(-x)$ = – arc cosec x

Gráficos das funções trigonométricas inversas

Em cada gráfico, y está em radianos. Porções sólidas de curvas correspondem aos valores principais.

12.86 y = arc sen x

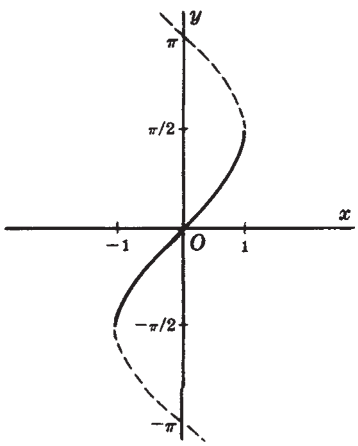


Fig. 12-11

12.87 y = arc cos x

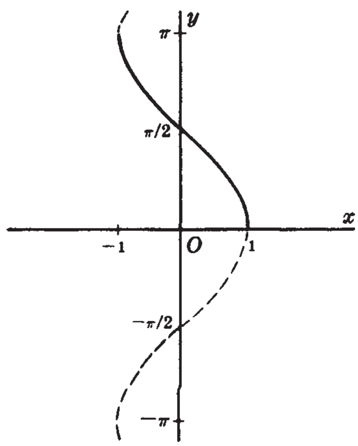


Fig. 12-12

12.88 y = arc tg x

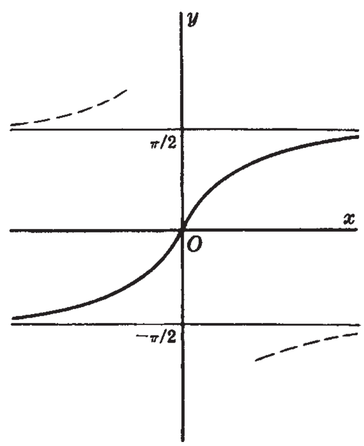


Fig. 12-13

12.89 y = arc cotg x

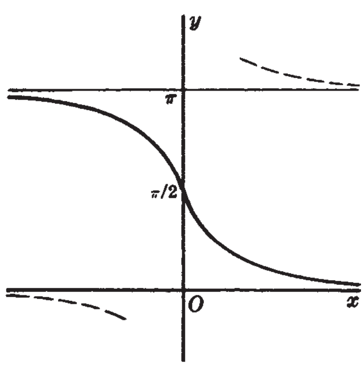


Fig. 12-14

12.90 y = arc sec x

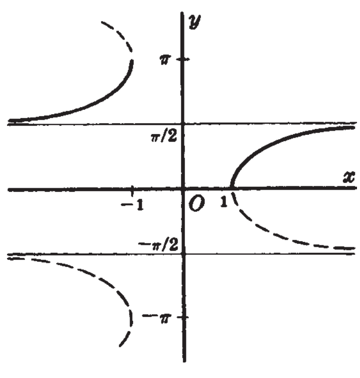


Fig. 12-15

12.91 y = arc cosec x

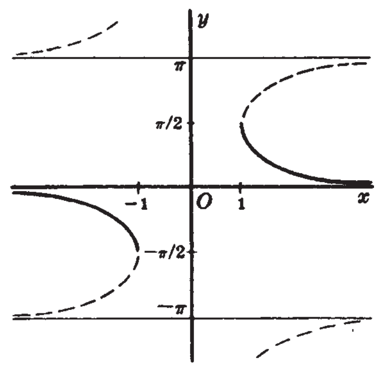


Fig. 12-16

Relações entre lados e ângulos de um triângulo plano

Os resultados seguintes são válidos para qualquer triângulo plano *ABC* com lados *a, b, c* e ângulos *A, B* e *C*.

12.92 Lei dos Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

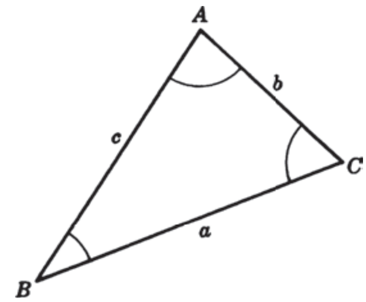


Fig. 12-17

12.93 Lei dos Cossenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

com relações análogas envolvendo os outros lados e ângulos.

12.94 Lei das Tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$$

com relações análogas envolvendo os outros lados e ângulos.

12.95 $\operatorname{sen} A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semiperímetro do triângulo. Relações análogas envolvendo os ângulos *B* e *C* podem ser obtidas.

Ver também Fórmula 7.5.

Relações entre lados e ângulos de um triângulo esférico

O triângulo esférico *ABC* está na superfície da esfera, como mostrado na Fig. 12-18. Os lados *a, b* e *c* [que são arcos de círculos máximos], são medidos por seus ângulos subentendidos no centro *O* da esfera. *A, B* e *C* são ângulos opostos aos lados *a, b* e *c*, respectivamente. Então, os seguintes resultados são válidos.

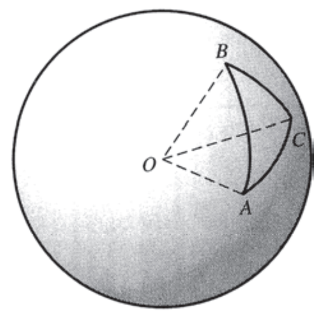


Fig. 12-18

12.96 Lei dos Senos

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

12.97 Lei dos Cossenos

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

com resultados análogos envolvendo os outros lados e ângulos.

12.98 Lei das Tangentes

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}$$

com resultados análogos envolvendo os outros lados e ângulos.

12.99 $\cos \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$

onde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Resultados análogos são válidos para os outros lados e ângulos.

12.100 $\cos \dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$

onde $S = \frac{1}{2}(A+B+C)$. Resultados análogos são válidos para os outros lados e ângulos.

Ver também Fórmula 7.44.

Regra de Napier para triângulos retângulos esféricos

Exceto pelo o ângulo reto *C*, há cinco outras partes do triângulo esférico *ABC* as quais, arranjadas na ordem dada na Fig. 12-19, são *a, b, A, c* e *B*.

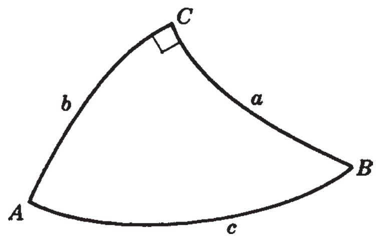


Fig. 12-19

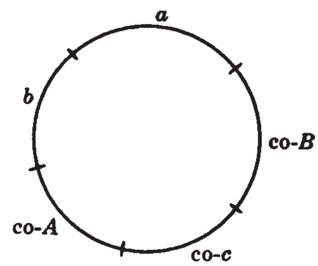


Fig. 12-20

Considere que essas quantidades são arranjadas em um círculo como na Fig. 12-20, onde colocamos o prefixo co (indicando *complemento*) à hipotenusa *c* e aos ângulos *A* e *B*.

Qualquer uma das partes deste círculo é chamada *parte média*, as duas partes vizinhas são chamadas *partes adjacentes* e as duas partes restantes são chamadas *partes opostas*. As regras de Napier são as seguintes:

12.101 O seno de qualquer parte média é igual ao produto das tangentes das partes adjacentes.

12.102 O seno de qualquer parte média é igual ao produto dos cossenos das partes opostas.

Exemplo Como co-A = 90º– A, co-B = 90º – B, temos

$$\text{sen}\, a = \text{tg}\, b\, (\text{co-}B) \quad \text{ou} \quad \text{sen}\, a = \text{tg}\, b\, \text{cotg}\, B$$
$$\text{sen}\, (\text{co-}A) = \cos a \cos (\text{co-}B) \quad \text{ou} \quad \cos A = \cos a\, \text{sen}\, B$$

É claro que estas também podem ser obtidas a partir dos resultados dados em 12.97.

13 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Leis dos expoentes

Abaixo, p e q são números reais, a e b são números positivos, m e n são inteiros positivos.

13.1 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ **13.2** $a^p/a^q = a^{p-q}$ **13.3** $(a^p)^q = a^{pq}$

13.4 $a^0 = 1, \ a \neq 0$ **13.5** $a^{-p} = 1/a^p$ **13.6** $(ab)^p = a^p b^p$

13.7 $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ **13.8** $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ **13.9** $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

Em a^p, p é chamado de *expoente*, a é a *base* e a^p é a potência *p-ésima* de a. A função $y = a^x$ é uma *função exponencial*.

Logaritmos e antilogaritmos

Se $a^p = N$, onde $a \neq 0$ ou 1, então $p = \log_a N$ é chamado de *logaritmo de N na base a*. O número $N = a^p$ é o *antilogaritmo de p na base a*, escrito como $\text{antilog}_a p$.

Exemplo Como $3^2 = 9$, temos $\log_3 9 = 2$, $\text{antilog}_3 2 = 9$.

A função $y = \log_a x$ é uma *função logarítmica*.

Leis dos logaritmos

13.10 $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

13.11 $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

13.12 $\log_a M^p = p \log_a M$

Logaritmos e antilogaritmos comuns

Os logaritmos e antilogaritmos comuns (também chamados *decimais* ou de *Briggs*) são aqueles em que a base $a = 10$. O logaritmo comum de N é denotado por $\log_{10} N$ ou, simplesmente, $\log N$. Para valores numéricos de logaritmos comuns, ver Tabela 1.

Logaritmos e antilogaritmos naturais

Os logaritmos e antilogaritmos naturais (também chamados *neperianos*) são aqueles nos quais a base $a = e = 2{,}71828\ 18\ldots$ (ver página 13). O logaritmo natural de N é denotado por $\log_e N$ ou $\ln N$. Para valores numéricos de logaritmos naturais, ver Tabela 7. Para valores de antilogaritmos naturais (isto é, a tabela fornecendo e^x para valores de x), ver Tabela 8.

Mudança de base de logaritmos

A relação entre logaritmos de um número N para diferentes bases a e b é dada por

13.13 $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Em particular,

13.14 $\log_e N = \ln N = 2{,}30258\ 50929\ 94 \ldots \log_{10} N$

13.15 $\log_{10} N = \log N = 0{,}43429\ 44819\ 03 \ldots \log_e N$

Relação entre funções exponenciais e trigonométricas

13.16 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$

Estas são chamadas *identidades de Euler*. Aqui, i é a unidade imaginária (ver página 20).

13.17 $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

13.18 $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

13.19 $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = -i\left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)$

13.20 $\operatorname{cotg}\theta = i\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}\right)$

13.21 $\sec\theta = \dfrac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$

13.22 $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$

Periodicidade de funções exponenciais

13.23 $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad k = \text{inteiro}$

A partir disso, vemos que e^x tem período $2\pi i$.

Forma polar de números complexos expressos como uma exponencial

A forma polar [ver 4.7] de um número complexo $z = x + iy$ pode ser escrita em termos de exponenciais como segue.

13.24 $z = x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$

Operações com números complexos na forma polar

As Fórmulas 4.8 a 4.11 são equivalentes ao que segue.

13.25 $(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

13.26 $\dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

13.27 $(re^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta}$ [teorema de De Moivre]

13.28 $(re^{i\theta})^{1/n} = [re^{i(\theta+2k\pi)}]^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$

Logaritmo de um número complexo

13.29 $\ln (re^{i\theta}) = \ln r + i\theta + 2k\pi i$ $\qquad k$ = inteiro

Funções Hiperbólicas 14

Definição das funções hiperbólicas

14.1 *Seno hiperbólico* de x $= \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

14.2 *Cosseno hiperbólico* de x $= \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

14.3 *Tangente hiperbólica* de x $= \operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

14.4 *Cotangente hiperbólica* de x $= \operatorname{cotgh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

14.5 *Secante hiperbólica* de x $= \operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

14.6 *Cossecante hiperbólica* de x $= \operatorname{cosech} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Relações entre as funções hiperbólicas

14.7 $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

14.8 $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

14.9 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

14.10 $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

14.11 $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

14.12 $\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{tgh}^2 x = 1$

14.13 $\operatorname{cotgh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$

Funções de argumentos negativos

14.14 $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

14.15 $\cosh(-x) = \cosh x$

14.16 $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh} x$

14.17 $\operatorname{cosech}(-x) = -\operatorname{cosech} x$

14.18 $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$

14.19 $\operatorname{cotgh}(-x) = -\operatorname{cotgh} x$

Fórmulas de adição

14.20 $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

14.21 $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

14.22 $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$

14.23 $\operatorname{cotgh}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y \pm 1}{\operatorname{cotgh} y \pm \operatorname{cotgh} x}$

Fórmulas de ângulo duplo

14.24 $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

14.25 $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x$

14.26 $\operatorname{tgh} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$

Fórmulas de ângulo metade

14.27 $\operatorname{senh} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$ $[+ \text{ se } x > 0, - \text{ se } x < 0]$

14.28 $\cosh \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$

14.29 $\operatorname{tgh} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$ $[+ \text{ se } x > 0, - \text{ se } x < 0]$

$$= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}$$

Fórmulas de ângulo múltiplo

14.30 $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

14.31 $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$

14.32 $\operatorname{tgh} 3x = \dfrac{3 \operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh}^3 x}{1 + 3 \operatorname{tgh}^2 x}$

14.33 $\operatorname{senh} 4x = 8 \operatorname{senh}^3 x \cosh x + 4 \operatorname{senh} x \cosh x$

14.34 $\cosh 4x = 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1$

14.35 $\operatorname{tgh} 4x = \dfrac{4 \operatorname{tgh} x + 4 \operatorname{tgh}^3 x}{1 + 6 \operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{tgh}^4 x}$

Potências de funções hiperbólicas

14.36 $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$

14.37 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}$

14.38 $\operatorname{senh}^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{senh} x$

14.39 $\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x$

14.40 $\operatorname{senh}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x$

14.41 $\cosh^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x$

Soma, diferença e produto de funções hiperbólicas

14.42 $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$

14.43 $\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$

14.44 $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$

14.45 $\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$

14.46 $\operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\}$

14.47 $\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\}$

14.48 $\operatorname{senh} x \cosh y = \frac{1}{2}\{\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\}$

Expressão das funções hiperbólicas em termos das outras

Na tabela abaixo, consideramos $x > 0$. Se $x < 0$, use o sinal apropriado, como indicado nas Fórmulas 14.14 a 14.19.

	senh $x = u$	cosh $x = u$	tgh $x = u$	cotgh $x = u$	sech $x = u$	cosech $x = u$
senh x	u	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$1/u$
cosh x	$\sqrt{1+u^2}$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}/u$
tgh x	$u/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$
cotgh x	$\sqrt{u^2+1}/u$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
sech x	$1/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$u/\sqrt{1+u^2}$
cosech x	$1/u$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	u

Gráficos das funções hiperbólicas

14.49 $y = \text{senh}\, x$

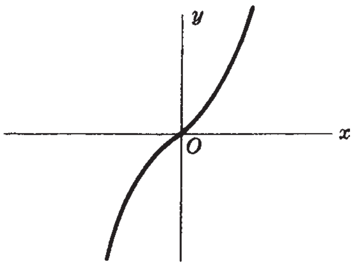


Fig. 14-1

14.50 $y = \cosh x$

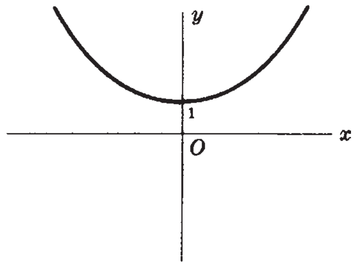


Fig. 14-2

14.51 $y = \text{tgh}\, x$

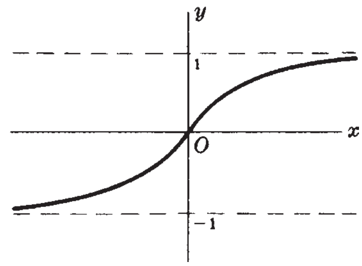


Fig. 14-3

14.52 $y = \text{cotgh}\, x$

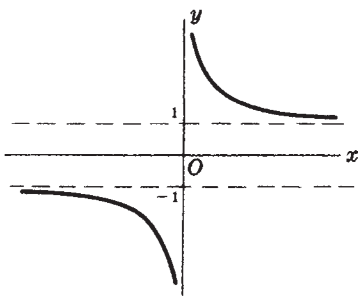


Fig. 14-4

14.53 $y = \text{sech}\, x$

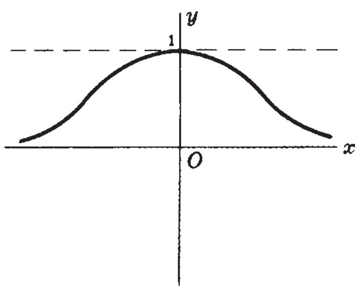


Fig. 14-5

14.54 $y = \text{cosech}\, x$

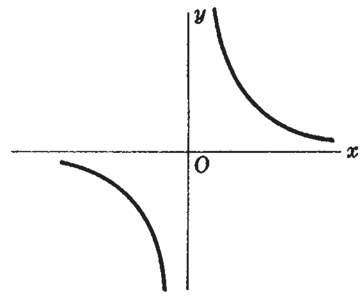


Fig. 14-6

Funções hiperbólicas inversas

Se $x = \text{senh}\, y$, então $y = \text{arc senh}\, x$ é denominado *arco seno hiperbólico* de x. Analogamente definimos as outras funções hiperbólicas inversas. As funções arco cosseno e secante hiperbólicas são plurívocas e, como no caso das funções trigonométricas inversas [ver 12.86 a 12.91], nos restringimos a valores principais nos quais estas funções podem ser consideradas bem definidas.

A lista a seguir apresenta os valores principais (a menos que o contrário seja indicado) das funções hiperbólicas inversas, expressas em termos de funções logarítmicas, que são consideradas como tomando valores reais.

14.55 $\text{arc senh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad -\infty < x < \infty$

14.56 $\text{arc cosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad x \geqq 1 \quad (\text{arc cosh}\, x > 0 \text{ é o valor principal})$

14.57 $\text{arc tgh}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$

14.58 $\text{arc cotgh}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \qquad x > 1 \text{ ou } x < -1$

14.59 $\text{arc sech}\, x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}\right) \qquad 0 < x \leqq 1 \quad (\text{arc sech}\, x > 0 \text{ é o valor principal})$

14.60 $\text{arc cosech}\, x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right) \qquad x \neq 0$

Relações entre as funções hiperbólicas inversas

14.61 arc cosech x = arc senh $(1/x)$

14.62 arc sech x = arc cosh $(1/x)$

14.63 arc cotgh x = arc tgh $(1/x)$

14.64 arc senh $(-x) = -$arc senh x

14.65 arc tgh $(-x) = -$ arc tgh x

14.66 arc cotgh $(-x) = -$arc cotgh x

14.67 arc cosech $(-x) = -$arc cosech x

Gráficos das funções hiperbólicas inversas

14.68 y = arc senh x

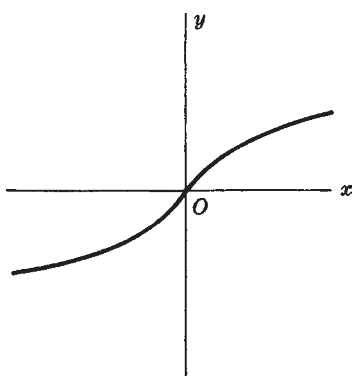


Fig. 14-7

14.69 y = arc cosh x

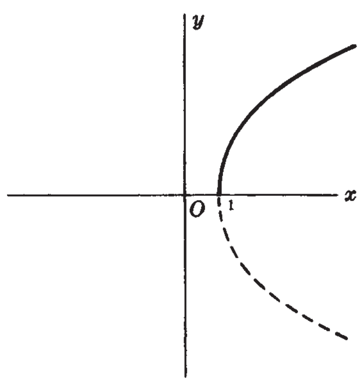


Fig. 14-8

14.70 y = arc tgh x

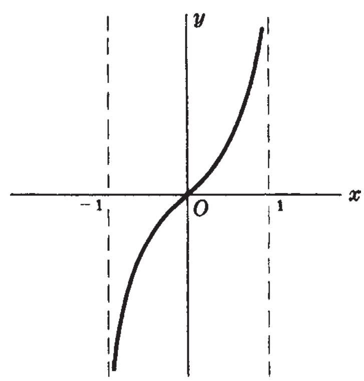


Fig. 14-9

14.71 y = arc cotgh x

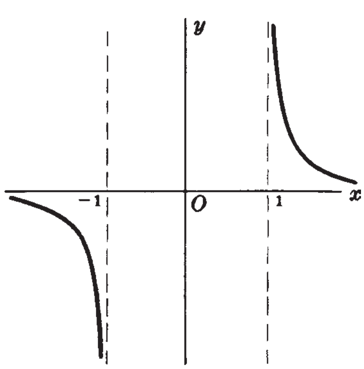


Fig. 14-10

14.72 y = arc sech x

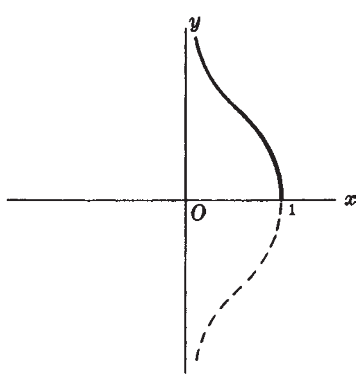


Fig. 14-11

14.73 y = arc cosech x

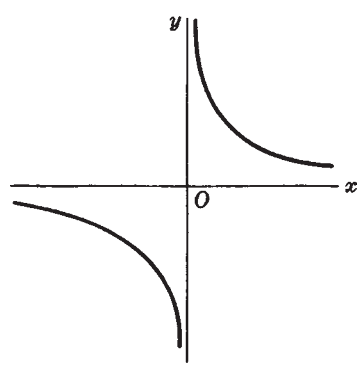


Fig. 14-12

Relação entre funções hiperbólicas e trigonométricas

14.74 $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$

14.75 $\cos(ix) = \cosh x$

14.76 $\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{tgh} x$

14.77 $\operatorname{cosec}(ix) = -i \operatorname{cosech} x$

14.78 $\sec(ix) = \operatorname{sech} x$

14.79 $\operatorname{cotg}(ix) = -i \operatorname{cotgh} x$

14.80 $\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen} x$

14.81 $\cosh(ix) = \cos x$

14.82 $\operatorname{tgh}(ix) = i \operatorname{tg} x$

14.83 $\operatorname{cosech}(ix) = -i \operatorname{cosec} x$

14.84 $\operatorname{sech}(ix) = \sec x$

14.85 $\operatorname{cotgh}(ix) = -i \operatorname{cotg} x$

Periodicidade das funções hiperbólicas

Nas fórmulas a seguir, k é qualquer número inteiro.

14.86 $\operatorname{senh}(x + 2k\pi i) = \operatorname{senh} x$

14.87 $\cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x$

14.88 $\operatorname{tgh}(x + k\pi i) = \operatorname{tgh} x$

14.89 $\operatorname{cosech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{cosech} x$

14.90 $\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x$

14.91 $\operatorname{cotgh}(x + k\pi i) = \operatorname{cotgh} x$

Relação entre funções hiperbólicas e trigonométricas inversas

14.92 $\operatorname{arc\,sen}(ix) = i \operatorname{arc\,sen} x$

14.93 $\operatorname{arc\,senh}(ix) = i \operatorname{arc\,sen} x$

14.94 $\operatorname{arc\,cos} x = \pm i \operatorname{arc\,cosh} x$

14.95 $\operatorname{arc\,cosh} x = \pm i \operatorname{arc\,cos} x$

14.96 $\operatorname{arc\,tg}(ix) = i \operatorname{arc\,tgh} x$

14.97 $\operatorname{arc\,tgh}(ix) = i \operatorname{arc\,tg} x$

14.98 $\operatorname{arc\,cotg}(ix) = i \operatorname{arc\,cotgh} x$

14.99 $\operatorname{arc\,cotgh}(ix) = -i \operatorname{arc\,cotg} x$

14.100 $\operatorname{arc\,sec} x = \pm i \operatorname{arc\,sech} x$

14.101 $\operatorname{arc\,sech} x = \pm i \operatorname{arc\,sec} x$

14.102 $\operatorname{arc\,cosec}(ix) = -i \operatorname{arc\,cosech} x$

14.103 $\operatorname{arc\,cosech}(ix) = -i \operatorname{arc\,cosec} x$

Derivadas

15

Definição de uma derivada

Considere $y = f(x)$. A derivada de y ou $f(x)$ é definida por

15.1 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

onde $h = \Delta x$. A derivada também é denotada por y', df/dx ou $f'(x)$. O processo de obtenção de uma derivada é chamado de *derivação*.

Regras gerais de derivação

No que segue, u, v e w são funções de x; a, b, c e n são constantes (com restrições quando indicado); e = 2,71828... é a base natural dos logaritmos; ln u é o logaritmo natural de u (isto é, o logaritmo de base e) onde supomos $u > 0$ e todos os ângulos são em radianos.

15.2 $$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

15.3 $$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

15.4 $$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$$

15.5 $$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$ [número finito de parcelas]

15.6 $$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

15.7 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

15.8 $$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

15.9 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

15.10 $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

15.11 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ [Regra da Cadeia]

15.12 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{dx/du}$

15.13 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$

Derivadas das funções trigonométricas e trigonométricas inversas

15.14 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

15.15 $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

15.16 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} u = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

15.17 $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$

15.18 $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \operatorname{tg} u\dfrac{du}{dx}$

15.19 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\dfrac{du}{dx}$

15.20 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$ $\left[-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,sen} u < \dfrac{\pi}{2}\right]$

15.21 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} u = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$ $[0 < \operatorname{arc\,cos} u < \pi]$

15.22 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$ $\left[-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} u < \dfrac{\pi}{2}\right]$

15.23 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cotg} u = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$ $[0 < \operatorname{arc\,cotg} u < \pi]$

15.24 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} u = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$ $\left[\begin{matrix} +\text{ se } 0 < \operatorname{arc\,sec} u < \pi/2 \\ -\text{ se } \pi/2 < \operatorname{arc\,sec} u < \pi \end{matrix}\right]$

15.25 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosec} u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$ $\left[\begin{matrix} -\text{ se } 0 < \operatorname{arc\,cosec} u < \pi/2 \\ +\text{ se } -\pi/2 < \operatorname{arc\,cosec} u < 0 \end{matrix}\right]$

Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas

15.26 $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{du}{dx}$ $[a \neq 0, 1]$

15.27 $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{d}{dx}\log_e u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

15.28 $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$

15.29 $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

15.30 $\dfrac{d}{dx}u^v = \dfrac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\dfrac{d}{dx}[v\ln u] = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^v\ln u\dfrac{dv}{dx}$

Derivadas das funções hiperbólicas e hiperbólicas inversas

15.31 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

15.32 $\dfrac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$

15.33 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh} u = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

15.34 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotgh} u = -\operatorname{cosech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

15.35 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\dfrac{du}{dx}$

15.36 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u\dfrac{du}{dx}$

15.37 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,senh} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\dfrac{du}{dx}$

15.38 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosh} u = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$ $\quad\left[\begin{array}{l}+ \text{ se } \operatorname{arc\,cosh} u > 0,\ u > 1\\ - \text{ se } \operatorname{arc\,cosh} u < 0,\ u > 1\end{array}\right]$

15.39 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tgh} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$ $\quad[-1 < u < 1]$

15.40 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cotgh} u = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$ $\quad[u > 1 \text{ ou } u < -1]$

15.41 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sech} u = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$ $\quad\left[\begin{array}{l}- \text{ se } \operatorname{arc\,sech} u > 0,\ 0 < u < 1\\ + \text{ se } \operatorname{arc\,sech} u < 0,\ 0 < u < 1\end{array}\right]$

15.42 $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosech} u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$ $\quad[-\text{se } u > 0,\ +\text{se } u < 0]$

Derivadas superiores

As derivadas segunda, terceira e superiores são definidas como segue.

15.43 Derivada segunda $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$

15.44 Derivada terceira $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$

15.45 Derivada enésima $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

Regra de Leibniz para derivadas superiores de produtos

Seja D^p o operador $\dfrac{d^p}{dx^p}$, de modo que $D^p u = \dfrac{d^p u}{dx^p} = $ *p-ésima* derivada de u. Então,

15.46 $D^n(uv) = uD^n v + \binom{n}{1}(Du)(D^{n-1}v) + \binom{n}{2}(D^2u)(D^{n-2}v) + \cdots + vD^n u$

onde $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ são os coeficientes binomiais [ver 3.5].

Como casos especiais, temos:

15.47 $\dfrac{d^2}{dx^2}(uv) = u\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^2u}{dx^2}$

15.48 $\dfrac{d^3}{dx^3}(uv) = u\dfrac{d^3v}{dx^3} + 3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2} + 3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^3u}{dx^3}$

Diferenciais

Seja $y = f(x)$ e $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Então,

15.49 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon = \dfrac{dy}{dx} + \epsilon$

onde $\epsilon \to 0$ com $\Delta x \to 0$. Assim,

15.50 $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x$

Se chamamos $\Delta x = dx$ a *diferencial* de x, então definimos a *diferencial* de y por

15.51 $dy = f'(x)\,dx$

Regras para diferenciais

As regras para diferenciais são exatamente análogas àquelas para derivadas. Como exemplo, observamos que

15.52 $d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw \pm \cdots$ [número finito de parcelas]

15.53 $d(uv) = u\,dv + v\,du$

15.54 $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

15.55 $d(u^n) = nu^{n-1}du$

15.56 $d(\text{sen } u) = \cos u\,du$

15.57 $d(\cos u) = -\text{sen } u\,du$

Derivadas parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função das duas variáveis x e y. Então, definimos a *derivada parcial* de z ou $f(x, y)$ em relação a x, mantendo y constante, por

15.58 $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}$$

Esta derivada parcial é também denotada por $\partial z/\partial x$, f_x ou z_x.

Analogamente, a derivada parcial de $z = f(x, y)$ em relação a y, mantendo x constante, é definida por

15.59 $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Esta derivada parcial é também denotada por $\partial z/\partial y$, f_y ou z_y.

As derivadas parciais de ordens superiores podem ser definidas por:

15.60 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

15.61 $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Os resultados em 15.61 serão iguais se as funções e suas derivadas parciais forem contínuas; ou seja, em tais casos, a ordem de derivação não faz diferença.

Extensões para funções de mais de duas variáveis são totalmente análogas.

Diferenciais de várias variáveis

A diferencial de $z = f(x, y)$ é definida como

15.62 $$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

onde $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$. Observe que dz é uma função de quatro variáveis, a saber x, y, dx e dy, e é linear nas variáveis dx e dy.

Extensões para funções de mais de duas variáveis são totalmente análogas.

Exemplo Seja $z = x^2 + 5xy + 2y^3$. Então

$$z_x = 2x + 5y \quad \text{e} \quad z_y = 5x + 6y^2$$

e, portanto,

$$dz = (2x + 5y)\,dx + (5x + 6y^2)\,dy$$

Suponha que queremos encontrar dz para $dx = 2,\ dy = 3$ no ponto $P\ (4, 1)$, ou seja, quando $x = 4$ e $y = 1$. A substituição resulta em

$$dz = (8 + 5)2 + (20 + 6)3 = 26 + 78 = 104$$

16 Integrais Indefinidas

Definição de uma integral indefinida

Se $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, então y é a função cuja derivada é $f(x)$ e é chamada de *antiderivada* de $f(x)$ ou *integral indefinida* de $f(x)$, denotada por $\int f(x)\,dx$. Analogamente, se $y = \int f(u)\,du$, então $\dfrac{dy}{du} = f(u)$. Como a derivada de uma constante é zero, todas as integrais indefinidas diferem por uma constante arbitrária.

Para a definição de uma integral definida, ver 18.1. O processo de determinação de uma integral é chamado *integração*.

Regras gerais de integração

No que segue, u, v e w são funções de x; a, b, p e q são quaisquer constantes, com restrições quando indicado; $e = 2{,}71828...$ é a base natural dos logaritmos; $\ln u$ denota o logaritmo natural de u, onde supomos $u > 0$ [em geral, para estender fórmulas aos casos em que também $u < 0$, substitua $\ln u$ por $\ln |u|$]; todos os ângulos são em radianos; todas as constantes de integração estão omitidas mas ficam subentendidas.

16.1 $\displaystyle\int a\ dx = ax$

16.2 $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

16.3 $\displaystyle\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx \pm \cdots$ [finitas parcelas]

16.4 $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ [Integração por partes]

Para integração por partes generalizada, ver 16.48.

16.5 $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$ [$u = ax$]

16.6 $\displaystyle\int F\{f(x)\}\,dx = \int F(u)\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{F(u)}{f'(x)}\,du$ [$u = f(x)$]

16.7 $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$ [$n \neq -1$; para $n = -1$, ver 16.8]

16.8 $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u|$ [$\ln u$, se $u > 0$; $\ln(-u)$, se $u < 0$]

16.9 $\displaystyle\int e^u\,du = e^u$

16.10 $\displaystyle\int a^u\,du = \int e^{u\ln a}\,du = \frac{e^{u\ln a}}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a}$ [$a > 0$, $a \neq 1$]

16.11 $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$

16.12 $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$

16.13 $\int \operatorname{tg} u\,du = \ln \sec u = -\ln \cos u$

16.14 $\int \operatorname{cotg} u\,du = \ln \operatorname{sen} u$

16.15 $\int \sec u\,du = \ln(\sec u + \operatorname{tg} u) = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

16.16 $\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln(\operatorname{cosec} u - \cot u) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{2}$

16.17 $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u$

16.18 $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u$

16.19 $\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u$

16.20 $\int \operatorname{cotg}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u - u$

16.21 $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \dfrac{u}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \dfrac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u)$

16.22 $\int \cos^2 u\,du = \dfrac{u}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \dfrac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u)$

16.23 $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u$

16.24 $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du = -\operatorname{cosec} u$

16.25 $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u$

16.26 $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u$

16.27 $\int \operatorname{tgh} u\,du = \ln \cosh u$

16.28 $\int \operatorname{cotgh} u\,du = \ln \operatorname{senh} u$

16.29 $\int \operatorname{sech} u\,du = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{tgh} u) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^u$

16.30 $\int \operatorname{cosech} u\,du = \ln \operatorname{tgh} \dfrac{u}{2} = -\operatorname{arc\,cotgh} e^u$

16.31 $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tgh} u$

16.32 $\int \operatorname{cosech}^2 u\,du = -\operatorname{cotgh} u$

16.33 $\int \operatorname{tgh}^2 u\,du = u - \operatorname{tgh} u$

16.34 $\int \operatorname{cotgh}^2 u\,du = u - \operatorname{cotgh} u$

16.35 $\int \operatorname{senh}^2 u\,du = \dfrac{\operatorname{senh} 2u}{4} - \dfrac{u}{2} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u - u)$

16.36 $\int \cosh^2 u\,du = \dfrac{\operatorname{senh} 2u}{4} + \dfrac{u}{2} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u + u)$

16.37 $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{sech} u$

16.38 $\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u\,du = -\operatorname{cosech} u$

16.39 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tg }\frac{u}{a}$

16.40 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\text{arc cotgh }\frac{u}{a}$ $\quad [u^2 > a^2]$

16.41 $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) = \frac{1}{a}\text{arc tgh }\frac{u}{a}$ $\quad [u^2 < a^2]$

16.42 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen }\frac{u}{a}$

16.43 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) = \text{arc senh }\frac{u}{a}$

16.44 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2})$

16.45 $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec }\left|\frac{u}{a}\right|$

16.46 $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right)$

16.47 $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right)$

16.48 $\displaystyle\int f^{(n)}g\,dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \cdots(-1)^n \int fg^{(n)}dx$

Isto é a *integração por partes generalizada*.

Transformações importantes

Na prática, frequentemente uma integral pode ser simplificada usando uma substituição ou transformação adequadas juntamente com a Fórmula 16.6. A lista seguinte fornece algumas transformações e seus efeitos.

16.49 $\displaystyle\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int F(u)\,du$ $\quad$ onde $u = ax+b$

16.50 $\displaystyle\int F(\sqrt{ax+b})\,dx = \frac{2}{a}\int u\,F(u)\,du$ $\quad$ onde $u=\sqrt{ax+b}$

16.51 $\displaystyle\int F(\sqrt[n]{ax+b})\,dx = \frac{n}{a}\int u^{n-1}F(u)\,du$ $\quad$ onde $u=\sqrt[n]{ax+b}$

16.52 $\displaystyle\int F(\sqrt{a^2-x^2})\,dx = a\int F(a\cos u)\cos u\,du$ $\quad$ onde $x = a\,\text{sen}\,u$

16.53 $\displaystyle\int F(\sqrt{x^2+a^2})\,dx = a\int F(a\sec u)\sec^2 u\,du$ $\quad$ onde $x = a\,\text{tg}\,u$

16.54 $\displaystyle\int F(\sqrt{x^2-a^2})\,dx = a\int F(a\,\text{tg}\,u)\sec u\,\text{tg}\,u\,du$ $\quad$ onde $x = a\sec u$

16.55 $\displaystyle\int F(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{F(u)}{u}du$ $\quad$ onde $u = e^{ax}$

16.56 $\int F(\ln x)\,dx = \int F(u)\,e^u\,du$ onde $u = \ln x$

16.57 $\int F\left(\text{arc sen } \dfrac{x}{a}\right)dx = a \int F(u)\cos u\,du$ onde $u = \text{arc sen } \dfrac{x}{a}$

Resultados análogos aplicam-se a outras funções trigonométricas inversas.

16.58 $\int F(\text{sen } x, \cos x)\,dx = 2 \int F\left(\dfrac{2u}{1+u^2}, \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)\dfrac{du}{1+u^2}$ onde $u = \text{tg } \dfrac{x}{2}$

17 Tabelas de Integrais Indefinidas Especiais

Aqui fornecemos tabelas de integrais indefinidas especiais. Como enunciamos nas observações acima da regra 16.1, também nestas tabelas a, b, p, q e n são constantes, com restrições quando indicado; e = 2,71828... é a base natural dos logaritmos; ln u denota o logaritmo natural de u, onde supomos $u > 0$ [em geral, para estender fórmulas aos casos em que também $u < 0$, substitua ln u por ln $|u|$]; todos os ângulos são em radianos; todas as constantes de integração estão omitidas mas ficam subentendidas. Supomos em todos os casos que a divisão por zero está excluída.

Nossas integrais estão divididas em tipos que envolvem as seguintes funções e expressões algébricas:

(1) $ax + b$	(13) $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	(25) e^{ax}
(2) $\sqrt{ax + b}$	(14) $x^3 + a^3$	(26) $\ln x$
(3) $ax + b$ e $px + q$	(15) $x^4 \pm a^4$	(27) senh ax
(4) $\sqrt{ax + b}$ e $px + q$	(16) $x^n \pm a^n$	(28) cosh ax
(5) $\sqrt{ax + b}$ e $\sqrt{px + q}$	(17) sen ax	(29) senh ax e cosh ax
(6) $x^2 + a^2$	(18) cos ax	(30) tgh ax
(7) $x^2 - a^2$, com $x^2 > a^2$	(19) sen ax e cos ax	(31) cotgh ax
(8) $a^2 - x^2$, com $x^2 < a^2$	(20) tg ax	(32) sech ax
(9) $\sqrt{x^2 + a^2}$	(21) cotg ax	(33) cosech ax
(10) $\sqrt{x^2 - a^2}$	(22) sec ax	(34) funções hiperbólicas inversas
(11) $\sqrt{a^2 - x^2}$	(23) cosec ax	
(12) $ax^2 + bx + c$	(24) funções trigonométricas inversas	

Algumas integrais contêm os números de Bernouilli, B_n, e os números de Euler, E_n, definidos no Capítulo 23.

1 Integrais envolvendo $ax + b$

17.1.1 $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$$

17.1.2 $$\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$$

17.1.3 $$\int \frac{x^2dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b)$$

17.1.4 $$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

17.1.5 $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

17.1.6 $\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)}$

17.1.7 $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$

17.1.8 $\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^2} = \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(ax+b)$

17.1.9 $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

17.1.10 $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = \frac{-a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

17.1.11 $\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{2(ax+b)^2}$

17.1.12 $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2}$

17.1.13 $\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(ax+b)$

17.1.14 $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$ [$n \neq -1$; ver 17.1.1]

17.1.15 $\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$ [$n \neq -1, -2$; ver 17.1.2 e 7]

17.1.16 $\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$ [$n \neq -1, -2, -3$]

17.1.17 $$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n-1}dx \\ \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \dfrac{mb}{(m+n+1)a}\displaystyle\int x^{m-1}(ax+b)^n dx \\ \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \dfrac{m+n+2}{(n+1)b}\displaystyle\int x^m(ax+b)^{n+1}dx \end{cases}$$

2 Integrais envolvendo $\sqrt{ax+b}$

17.2.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$

17.2.2 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$

17.2.3 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$

17.2.4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right) = \frac{2}{\sqrt{-b}}\text{arc tg}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}$

17.2.5 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17.2.6 $\int \sqrt{ax+b}\, dx = \dfrac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}$

17.2.7 $\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \dfrac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$

17.2.8 $\int x^2\sqrt{ax+b}\, dx = \dfrac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(ax+b)^3}$

17.2.9 $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17.2.10 $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x} + \dfrac{a}{2}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

17.2.11 $\int \dfrac{x^m}{\sqrt{ax+b}} dx = \dfrac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \dfrac{2mb}{(2m+1)a}\int \dfrac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}} dx$

17.2.12 $\int \dfrac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \dfrac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \dfrac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$ $[m \neq 1]$

17.2.13 $\int x^m\sqrt{ax+b}\, dx = \dfrac{2x^m}{(2m+3)a}(ax+b)^{3/2} - \dfrac{2mb}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\, dx$

17.2.14 $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^m} dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}} + \dfrac{a}{2(m-1)}\int \dfrac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$ $[m \neq 1]$

17.2.15 $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^m} dx = \dfrac{-(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}} - \dfrac{(2m-5)a}{(2m-2)b}\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}} dx$ $[m \neq 1]$

17.2.16 $\int (ax+b)^{m/2}\, dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$ $[m \neq -2]$

17.2.17 $\int x(ax+b)^{m/2}dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)} - \dfrac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$

17.2.18 $\int x^2(ax+b)^{m/2}\, dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)} - \dfrac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)} + \dfrac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)}$

17.2.19 $\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx = \dfrac{2(ax+b)^{m/2}}{m} + b\int \dfrac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x} dx$

17.2.20 $\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x^2} dx = -\dfrac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx} + \dfrac{ma}{2b}\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x} dx$

17.2.21 $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \dfrac{2}{(m-2)b(ax+b)^{(m-2)/2}} + \dfrac{1}{b}\int \dfrac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}}$

3 Integrais envolvendo $ax + b$ e $px + q$

17.3.1 $\int \dfrac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \dfrac{1}{bp-aq}\ln\left(\dfrac{px+q}{ax+b}\right)$

17.3.2 $\int \dfrac{x\, dx}{(ax+b)(px+q)} = \dfrac{1}{bp-aq}\left\{\dfrac{b}{a}\ln(ax+b) - \dfrac{q}{p}\ln(px+q)\right\}$

17.3.3 $\int \dfrac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \dfrac{1}{bp-aq}\left\{\dfrac{1}{ax+b} + \dfrac{p}{bp-aq}\ln\left(\dfrac{px+q}{ax+b}\right)\right\}$

17.3.4 $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{q}{bp-aq}\ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\}$$

17.3.5 $$\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2}\left\{\frac{q^2}{p}\ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2}\ln(ax+b)\right\}$$

17.3.6 $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}}\right\}$$

17.3.7 $$\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln(px+q)$$

17.3.8 $$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a\displaystyle\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-m-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\displaystyle\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}\,dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\displaystyle\int \frac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}\,dx\right\} \end{cases}$$

4 Integrais envolvendo $\sqrt{ax+b}$ e $px+q$

17.4.1 $$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

17.4.2 $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{aq-bp}\sqrt{p}}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

17.4.3 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \dfrac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \dfrac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}}\,\text{arc tg}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

17.4.4 $$\int (px+q)^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(px+q)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{(2n+3)p} + \frac{bp-aq}{(2n+3)p}\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}$$

17.4.5 $$\int \frac{dx}{(px+q)^n\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(aq-bp)(px+q)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(aq-bp)}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

17.4.6 $$\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2(px+q)^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a}\int \frac{(px+q)^{n-1}dx}{\sqrt{ax+b}}$$

17.4.7 $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n}\,dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}} \qquad [n \neq 1]$$

5 Integrais envolvendo $\sqrt{ax+b}$ e $\sqrt{px+q}$

17.5.1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{ap}} \ln\left(\sqrt{a(px+q)}+\sqrt{p(ax+b)}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-ap}} \text{ arc tg } \sqrt{\dfrac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} \end{cases}$$

17.5.2 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.3 $$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap}\sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.4 $$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.5 $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}}$$

6 Integrais envolvendo $x^2 + a^2$

17.6.1 $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a}$$

17.6.2 $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

17.6.3 $$\int \frac{x^2dx}{x^2+a^2} = x - a \text{ arc tg } \frac{x}{a}$$

17.6.4 $$\int \frac{x^3dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2)$$

17.6.5 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

17.6.6 $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \text{ arc tg } \frac{x}{a}$$

17.6.7 $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

17.6.8 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \text{ arc tg } \frac{x}{a}$$

17.6.9 $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)}$$

17.6.10 $$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \text{ arc tg } \frac{x}{a}$$

17.6.11 $$\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

17.6.12 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

17.6.13 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\text{ arc tg }\frac{x}{a}$

17.6.14 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$

17.6.15 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.6.16 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.6.17 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.6.18 $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2+a^2)^n}$

17.6.19 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n}$

7 Integrais envolvendo $x^2 - a^2$, com $x^2 > a^2$

17.7.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a}\text{ arc cotgh }\frac{x}{a}$

17.7.2 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.3 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.4 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2-a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)$

17.7.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.8 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.9 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2-a^2)}$

17.7.10 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.11 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.12 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.13 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(x^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.14 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.15 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.7.16 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.7.17 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.7.18 $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{(x^2-a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^n}$

17.7.19 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}}$

8 Integrais envolvendo $a^2 - x^2$, com $x^2 < a^2$

17.8.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{1}{a}\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a}$

17.8.2 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.3 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{a^2-x^2} = -x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.4 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{a^2-x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.8 $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.9 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-x^2)}$

17.8.10 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.11 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.12 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.13 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.14 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.15 $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.8.16 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.8.17 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.8.18 $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^n} = a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$

17.8.19 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2-x^2)^n}$

9 Integrais envolvendo $\sqrt{x^2+a^2}$

17.9.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) \quad = \quad \text{arc senh}\,\frac{x}{a}$

17.9.2 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$

17.9.3 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.4 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$

17.9.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$

17.9.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.8 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.9 $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

17.9.10 $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.11 $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

17.9.12 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.13 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.14 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.15 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.16 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.17 $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.18 $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.19 $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.20 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.21 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.22 $\displaystyle\int (x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.23 $\displaystyle\int x(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$

17.9.24 $\displaystyle\int x^2(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.25 $\displaystyle\int x^3(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$

17.9.26 $\displaystyle\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.27 $\displaystyle\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.28 $\displaystyle\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

10 Integrais envolvendo $\sqrt{x^2-a^2}$

17.10.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.2 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$

17.10.3 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.4 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2}$

17.10.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.6 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$

17.10.7 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.8 $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.9 $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$

17.10.10 $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.11 $\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$

17.10.12 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\,\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.13 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.14 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.15 $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.16 $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.17 $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.18 $\int \frac{x^3dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.19 $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.20 $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.21 $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\text{arc sec}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.22 $\int (x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.23 $\int x(x^2-a^2)^{3/2}dx = \dfrac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

17.10.24 $\int x^2(x^2-a^2)^{3/2}dx = \dfrac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \dfrac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \dfrac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} + \dfrac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.25 $\int x^3(x^2-a^2)^{3/2}dx = \dfrac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7} + \dfrac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

17.10.26 $\int \dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}dx = \dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3 \operatorname{arc\,sec}\left|\dfrac{x}{a}\right|$

17.10.27 $\int \dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2}dx = -\dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} + \dfrac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \dfrac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.28 $\int \dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}dx = -\dfrac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2} + \dfrac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \dfrac{3}{2}a \operatorname{arc\,sec}\left|\dfrac{x}{a}\right|$

11 Integrais envolvendo $\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.1 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}$

17.11.2 $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.3 $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}$

17.11.4 $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.5 $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.6 $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$

17.11.7 $\int \dfrac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \dfrac{1}{2a^3}\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.8 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}$

17.11.9 $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\dfrac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

17.11.10 $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\dfrac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \dfrac{a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \dfrac{a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}$

17.11.11 $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \dfrac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

17.11.12 $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.13 $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}$

17.11.14 $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

17.11.15 $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

17.11.16 $$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

17.11.17 $$\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sen}\,\frac{x}{a}$$

17.11.18 $$\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

17.11.19 $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

17.11.20 $$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}}$$

17.11.21 $$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

17.11.22 $$\int (a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$$

17.11.23 $$\int x(a^2-x^2)^{3/2}dx = -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

17.11.24 $$\int x^2(a^2-x^2)^{3/2}dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$$

17.11.25 $$\int x^3(a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

17.11.26 $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

17.11.27 $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$$

17.11.28 $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

12 Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Nos resultados seguintes, se $b^2 = 4ac$, então $ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2$ e podem ser usadas as integrais de 17.1. Se $b = 0$, use as integrais de 17.6. Se $a = 0$ ou $c = 0$, use as integrais de 17.1.

17.12.1 $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\text{arc tg}\,\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left(\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$$

17.12.2 $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.3 $$\int \frac{x^2dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln(ax^2+bx+c) + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.4 $$\int \frac{x^m dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{m-2}dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{m-1}dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.5 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.6 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)} = \frac{b}{2c^2}\ln\left(\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right) - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.7 $$\int \frac{dx}{x^n(ax^2+bx+c)} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^2+bx+c)} \quad [n \neq 1]$$

17.12.8 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.9 $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.10 $$\int \frac{x^2dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.11 $$\int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$
$$- \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad [2n-m \neq 1]$$

17.12.12 $$\int \frac{x^{2n-1}dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

17.12.13 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2} = \frac{1}{2c(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)}$$

17.12.14 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{1}{cx(ax^2+bx+c)} - \frac{3a}{c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} - \frac{2b}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2}$$

17.12.15 $$\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n}$$
$$- \frac{(m+n-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n} \quad [m \neq 1]$$

13 Integrais envolvendo $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Nos resultados seguintes, se $b^2 = 4ac$, então $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+b/2a)$ e podem ser usadas as integrais de 17.1. Se $b = 0$, use as integrais de 17.9. Se $a = 0$ ou $c = 0$, use as integrais de 17.2 e 5.

17.13.1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\text{arc sen}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad = \quad \dfrac{1}{\sqrt{a}}\text{arc senh}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

17.13.2 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.3 $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.4 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\,\text{arc sen}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \;=\; -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc senh}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

17.13.5 $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.6 $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.7 $$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c}$$
$$-\frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.8 $$\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{6ax-5b}{24a^2}(ax^2+bx+c)^{3/2} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

17.13.9 $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.10 $$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.11 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.12 $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.13 $$\int \frac{x^2dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.14 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

17.13.15 $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}} = -\frac{ax^2+2bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$
$$-\frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.16 $$\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)}\int (ax^2+bx+c)^{n-1/2}dx$$

17.13.17 $$\int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}dx = \frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{a(2n+3)} - \frac{b}{2a}\int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}dx$$

17.13.18 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$
$$+\frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$

17.13.19 $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}} = \frac{1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}$$

14 Integrais envolvendo $x^3 + a^3$

Observe que, para fórmulas envolvendo $x^3 - a^3$, substitua a por $-a$.

17.14.1 $$\int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\left(\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2}\right) + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.2 $$\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) + \frac{1}{a\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.3 $$\int \frac{x^2dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln(x^3+a^3)$$

17.14.4 $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

17.14.5 $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{6a^4}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.6 $$\int \frac{dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5}\ln\left(\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2}\right) + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.7 $$\int \frac{x\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.8 $$\int \frac{x^2dx}{(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(x^3+a^3)}$$

17.14.9 $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

17.14.10 $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(x^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3}$$

17.14.11 $$\int \frac{x^m dx}{x^3+a^3} = \frac{x^{m-2}}{m-2} - a^3\int \frac{x^{m-3}dx}{x^3+a^3} \qquad [m \neq 2]$$

17.14.12 $$\int \frac{dx}{x^n(x^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{x^{n-3}(x^3+a^3)} \qquad [n \neq 1]$$

15 Integrais envolvendo $x^4 \pm a^4$

17.15.1 $$\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\left[\text{arc tg}\left(1-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right) - \text{arc tg}\left(1+\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right]$$

17.15.2 $$\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2a^2}\text{arc tg}\,\frac{x^2}{a^2}$$

17.15.3 $$\int \frac{x^2dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}}\left[\text{arc tg}\left(1-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right) - \text{arc tg}\left(1+\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right]$$

17.15.4 $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4} \ln (x^4 + a^4)$

17.15.5 $\int \frac{dx}{x(x^4 + a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln\left(\frac{x^4}{x^4 + a^4}\right)$

17.15.6 $\int \frac{dx}{x^2(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{1}{4a^5\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2}\right)$

$$+ \frac{1}{2a^5\sqrt{2}}\left[\text{arc tg}\left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{a}\right) - \text{arc tg}\left(1 + \frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right]$$

17.15.7 $\int \frac{dx}{x^3(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{1}{2a^6} \text{arc tg}\, \frac{x^2}{a^2}$

17.15.8 $\int \frac{dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) - \frac{1}{2a^3} \text{arc tg}\, \frac{x}{a}$

17.15.9 $\int \frac{x\, dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^2} \ln\left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)$

17.15.10 $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) + \frac{1}{2a} \text{arc tg}\, \frac{x}{a}$

17.15.11 $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4} \ln (x^4 - a^4)$

17.15.12 $\int \frac{dx}{x(x^4 - a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln\left(\frac{x^4 - a^4}{x^4}\right)$

17.15.13 $\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)} = \frac{1}{a^4 x} + \frac{1}{4a^5} \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) + \frac{1}{2a^5} \text{arc tg}\, \frac{x}{a}$

17.15.14 $\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)} = \frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{1}{4a^6} \ln\left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)$

16 Integrais envolvendo $x^n \pm a^n$

17.16.1 $\int \frac{dx}{x(x^n + a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left(\frac{x^n}{x^n + a^n}\right)$

17.16.2 $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n + a^n} = \frac{1}{n} \ln (x^n + a^n)$

17.16.3 $\int \frac{x^m dx}{(x^n + a^n)^r} = \int \frac{x^{m-n} dx}{(x^n + a^n)^{r-1}} - a^n \int \frac{x^{m-n} dx}{(x^n + a^n)^r}$

17.16.4 $\int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n} (x^n + a^n)^r}$

17.16.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}} = \frac{1}{n\sqrt{a^n}} \ln\left(\frac{\sqrt{x^n + a^n} - \sqrt{a^n}}{\sqrt{x^n + a^n} + \sqrt{a^n}}\right)$

17.16.6 $\int \frac{dx}{x(x^n - a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left(\frac{x^n - a^n}{x^n}\right)$

17.16.7 $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n - a^n} = \frac{1}{n} \ln (x^n - a^n)$

17.16.8 $\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{(x^n-a^n)^r} = a^n \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n-a^n)^r} + \int \frac{x^{m-n}\,dx}{(x^n-a^n)^{r-1}}$

17.16.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^r} = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n-a^n)^r} - \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^{r-}}$

17.16.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^n}} = \frac{2}{n\sqrt{a^n}}\cos^{-1}\sqrt{\frac{a^n}{x^n}}$

17.16.11 $\displaystyle\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m}+a^{2m}} = \frac{1}{ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m} \operatorname{sen}\frac{(2k-1)p\pi}{2m}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+a\cos[(2k-1)\pi/2m]}{a\operatorname{sen}[(2k-1)\pi/2m]}\right)$

$\displaystyle -\frac{1}{2ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{(2k-1)p\pi}{2m}\ln\left(x^2+2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}+a^2\right)$ $[0 < p \leqq 2m]$

17.16.12 $\displaystyle\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m}-a^{2m}} = \frac{1}{2ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\cos\frac{kp\pi}{m}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{m}+a^2\right)$

$\displaystyle -\frac{1}{ma^{2m-p}}\sum_{k=1}^{m-1}\operatorname{sen}\frac{kp\pi}{m}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-a\cos(k\pi/m)}{a\operatorname{sen}(k\pi/m)}\right)$

$\displaystyle +\frac{1}{2ma^{2m-p}}\{\ln(x-a)+(-1)^p\ln(x+a)\}$ $[0 < p \leqq 2m]$

17.16.13 $\displaystyle\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m+1}+a^{2m+1}} = \frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{sen}\frac{2kp\pi}{2m+1}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right)$

$\displaystyle -\frac{(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2+2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+a^2\right)$

$\displaystyle +\frac{(-1)^{p-1}\ln(x+a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$ $[0 < p \leqq 2m+1]$

17.16.14 $\displaystyle\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m+1}-a^{2m+1}} = \frac{-2}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{sen}\frac{2kp\pi}{2m+1}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right)$

$\displaystyle +\frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2kp\pi}{2m+1}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+a^2\right)$

$\displaystyle +\frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$ $[0 < p \leqq 2m+1]$

17 Integrais envolvendo sen *ax*

17.17.1 $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$

17.17.2 $\displaystyle\int x\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}$

17.17.3 $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax + \left(\frac{2}{a^3}-\frac{x^2}{a}\right)\cos ax$

17.17.4 $\displaystyle\int x^3\operatorname{sen} ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2}-\frac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen} ax + \left(\frac{6x}{a^3}-\frac{x^3}{a}\right)\cos ax$

17.17.5 $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx = ax - \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \cdots$

17.17.6 $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{x} + a\int \frac{\cos ax}{x}\,dx$ (Ver 17.18.5.)

17.17.7 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{\alpha}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{cotg} ax) = \frac{1}{\alpha}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

17.17.8 $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.17.9 $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

17.17.10 $\int x\operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\operatorname{sen} 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

17.17.11 $\int \operatorname{sen}^3 ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a}$

17.17.12 $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.17.13 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cotg} ax$

17.17.14 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a\operatorname{sen}^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

17.17.15 $\int \operatorname{sen} px\operatorname{sen} qx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)}$ $[p \neq \pm q]$

17.17.16 $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.17.17 $\int \frac{x\,dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$

17.17.18 $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$

17.17.19 $\int \frac{x\,dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.17.20 $\int \frac{dx}{(1-\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.17.21 $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)$

17.17.22 $\int \frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{p\operatorname{tg}\frac{1}{2}ax + q}{\sqrt{p^2-q^2}} \\[2ex] \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\operatorname{tg}\frac{1}{2}ax + q - \sqrt{q^2-p^2}}{p\operatorname{tg}\frac{1}{2}ax + q + \sqrt{q^2-p^2}}\right) \end{cases}$ $[p \neq \pm q]$

17.17.23 $\int \frac{dx}{(p+q\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{q\cos ax}{a(p^2-q^2)(p+q\operatorname{sen} ax)} + \frac{p}{p^2-q^2}\int \frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax}$ $[p \neq \pm q]$

17.17.24 $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2+q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{p^2+q^2}\operatorname{tg} ax}{p}$

17.17.25 $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2-q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}\operatorname{tg} ax}{p} \\ \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\operatorname{tg} ax+p}{\sqrt{q^2-p^2}\operatorname{tg} ax-p}\right)\end{cases}$ $[p \neq \pm q]$

17.17.26 $\displaystyle\int x^m \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{x^m\cos ax}{a} + \frac{mx^{m-1}\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\operatorname{sen} ax\, dx$

17.17.27 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^n}dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$ (Ver 17.18.27.) $[n \neq 1]$

17.17.28 $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx$

17.17.29 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$ $[n \neq 1]$

17.17.30 $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-x\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\operatorname{sen}^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$ $[n \neq 1, 2]$

18 Integrais envolvendo cos *ax*

17.18.1 $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$

17.18.2 $\displaystyle\int x\cos ax\, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\operatorname{sen} ax}{a}$

17.18.3 $\displaystyle\int x^2\cos ax\, dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

17.18.4 $\displaystyle\int x^3\cos ax\, dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

17.18.5 $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x}dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots$

17.18.6 $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x^2}dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int\frac{\operatorname{sen} ax}{x}dx$ (Ver 17.17.5.)

17.18.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax) = \frac{1}{a}\ln\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.18.8 $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.18.9 $\displaystyle\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}\ 2ax}{4a}$

17.18.10 $\displaystyle\int x\cos^2 ax\, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

17.18.11 $\displaystyle\int \cos^3 ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} - \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{3a}$

17.18.12 $\displaystyle\int \cos^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.18.13 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a}$

17.18.14 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.18.15 $\displaystyle\int \cos ax \cos px\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{sen}(a+p)x}{2(a+p)}$ $[a \neq \pm p]$

17.18.16 $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2}$

17.18.17 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln \operatorname{sen}\frac{ax}{2}$

17.18.18 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

17.18.19 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}$

17.18.20 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{cotg}^3\frac{ax}{2}$

17.18.21 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}$

17.18.22 $\displaystyle\int \frac{dx}{p+q\cos ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{(p-q)/(p+q)}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}ax \\ \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}ax + \sqrt{(q+p)/(q-p)}}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}ax - \sqrt{(q+p)/(q-p)}}\right) \end{cases}$ $[p \neq \pm q]$

17.18.23 $\displaystyle\int \frac{dx}{(p+q\cos ax)^2} = \frac{q\operatorname{sen} ax}{a(q^2-p^2)(p+q\cos ax)} - \frac{p}{q^2-p^2}\int \frac{dx}{p+q\cos ax}$ $[p \neq \pm q]$

17.18.24 $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2+q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{p\operatorname{tg} ax}{\sqrt{p^2+q^2}}$

17.18.25 $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2-q^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{p\operatorname{tg} ax}{\sqrt{p^2-q^2}} \\ \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\operatorname{tg} ax - \sqrt{q^2-p^2}}{p\operatorname{tg} ax + \sqrt{q^2-p^2}}\right) \end{cases}$ $[p \neq \pm q]$

17.18.26 $\displaystyle\int x^m\cos ax\,dx = \frac{x^m\operatorname{sen} ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2}\cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax\,dx$

17.18.27 $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x^n}dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^{n-1}}dx$ (Ver 17.17.27.) $[n \neq 1]$

17.18.28 $\displaystyle\int \cos^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax\cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$

17.18.29 $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\operatorname{sen}\ ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{b-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $[n \neq 1]$

17.18.30 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x\operatorname{sen} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax}$ $[n \neq 1, 2]$

19 Integrais envolvendo sen ax e cos ax

17.19.1 $\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = \dfrac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a}$

17.19.2 $\int \operatorname{sen} px \cos qx\, dx = -\dfrac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \dfrac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}$ $[p \neq \pm q]$

17.19.3 $\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\, dx = \dfrac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a}$ $[n \neq -1]$

17.19.4 $\int \cos^n ax \operatorname{sen} ax\, dx = -\dfrac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a}$ $[n \neq -1]$

17.19.5 $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \dfrac{x}{8} - \dfrac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.19.6 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax} = \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax$

17.19.7 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos ax} = \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{ax}{2}\right) - \dfrac{1}{a \operatorname{sen} ax}$

17.19.8 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^2 ax} = \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2} + \dfrac{1}{a \cos ax}$

17.19.9 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax} = -\dfrac{2 \operatorname{cotg} 2ax}{a}$

17.19.10 $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos ax}\, dx = -\dfrac{\operatorname{sen} ax}{a} + \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

17.19.11 $\int \dfrac{\cos^2 ax}{\operatorname{sen} ax}\, dx = \dfrac{\cos ax}{a} + \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2}$

17.19.12 $\int \dfrac{dx}{\cos ax(1 \pm \operatorname{sen} ax)} = \mp \dfrac{1}{2a(1 \pm \operatorname{sen} ax)} + \dfrac{1}{2a} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$

17.19.13 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \dfrac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \dfrac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \dfrac{ax}{2}$

17.19.14 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \dfrac{1}{a\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{ax}{2} \pm \dfrac{\pi}{8}\right)$

17.19.15 $\int \dfrac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \dfrac{x}{2} \mp \dfrac{1}{2a} \ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax)$

17.19.16 $\int \dfrac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \pm \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2a} \ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax)$

17.19.17 $\int \dfrac{\operatorname{sen} ax\, dx}{p + q \cos ax} = -\dfrac{1}{aq} \ln(p + q \cos ax)$

17.19.18 $\int \dfrac{\cos ax\, dx}{p + q \operatorname{sen} ax} = \dfrac{1}{aq} \ln(p + q \operatorname{sen} ax)$

17.19.19 $\int \dfrac{\operatorname{sen} ax\, dx}{(p + q \cos ax)^n} = \dfrac{1}{aq(n-1)(p + q \cos ax)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.19.20 $\int \dfrac{\cos ax\, dx}{(p + q \operatorname{sen} ax)^n} = \dfrac{-1}{aq(n-1)(p + q \operatorname{sen} ax)^{n-1}}$ $[n \neq 1]$

17.19.21 $\int \dfrac{dx}{p \operatorname{sen} ax + q \cos ax} = \dfrac{1}{a\sqrt{p^2 + q^2}} \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{ax + \operatorname{arc\,tg}(q/p)}{2}\right)$

17.19.22 $$\int \frac{dx}{p\,\text{sen}\,ax + q\cos ax + r} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\,\text{arc tg}\left(\dfrac{p+(r-q)\,\text{tg}(ax/2)}{\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\right) & [r \neq p \text{ e } r^2 \neq p^2+q^2] \\ \dfrac{1}{a\sqrt{p^2+q^2-r^2}}\ln\left(\dfrac{p-\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\,\text{tg}\,(ax/2)}{p+\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\,\text{tg}\,(ax/2)}\right) \end{cases}$$

17.19.23 $$\int \frac{dx}{p\,\text{sen}\,ax + q(1+\cos ax)} = \frac{1}{ap}\ln\left(q + p\,\text{tg}\,\frac{ax}{2}\right)$$

17.19.24 $$\int \frac{dx}{p\,\text{sen}\,ax + q\cos ax \pm \sqrt{p^2+q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax + \text{arc tg}\,(q/p)}{2}\right)$$

17.19.25 $$\int \frac{dx}{p^2\,\text{sen}^2\,ax + q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{apq}\,\text{arc tg}\left(\frac{p\,\text{tg}\,ax}{q}\right)$$

17.19.26 $$\int \frac{dx}{p^2\,\text{sen}^2\,ax - q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{2apq}\ln\left(\frac{p\,\text{tg}\,ax - q}{p\,\text{tg}\,ax + q}\right)$$

17.19.27 $$\int \text{sen}^m\,ax\cos^n ax\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\text{sen}^{m-1}\,ax\cos^{n+1}ax}{a(m+n)} + \dfrac{m-1}{m+n}\displaystyle\int \text{sen}^{m-2}\,ax\cos^n ax\,dx \\ \dfrac{\text{sen}^{m+1}\,ax\cos^{n-1}ax}{a(m+n)} + \dfrac{n-1}{m+n}\displaystyle\int \text{sen}^{m}\,ax\cos^{n-2} ax\,dx \end{cases} \quad [m \neq -n]$$

17.19.28 $$\int \frac{\text{sen}^m\,ax}{\cos^n ax}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}^{m-1}\,ax}{a(n-1)\cos^{n-1}ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \dfrac{\text{sen}^{m-2}\,ax}{\cos^{n-2}ax}\,dx \\ \dfrac{\text{sen}^{m+1}\,ax}{a(n-1)\cos^{n-1}ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \dfrac{\text{sen}^{m}\,ax}{\cos^{n-2}ax}\,dx \\ \dfrac{-\text{sen}^{m-1}\,ax}{a(m-n)\cos^{n-1}ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \dfrac{\text{sen}^{m-2}\,ax}{\cos^{n}ax}\,dx \end{cases} \quad [m \neq n,\ n \neq 1]$$

17.19.29 $$\int \frac{\cos^m ax}{\text{sen}^n\,ax}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-\cos^{m-1}ax}{a(n-1)\,\text{sen}^{n-1}\,ax} - \dfrac{m-1}{n-1}\displaystyle\int \dfrac{\cos^{m-2}ax}{\text{sen}^{n-2}\,ax}\,dx \\ \dfrac{-\cos^{m+1}ax}{a(n-1)\,\text{sen}^{n-1}\,ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1}\displaystyle\int \dfrac{\cos^{m}ax}{\text{sen}^{n-2}\,ax}\,dx \\ \dfrac{\cos^{m-1}ax}{a(m-n)\,\text{sen}^{n-1}\,ax} + \dfrac{m-1}{m-n}\displaystyle\int \dfrac{\cos^{m-2}ax}{\text{sen}^{n}\,ax}\,dx \end{cases} \quad [m \neq n,\ n \neq 1]$$

17.19.30 $$\int \frac{dx}{\text{sen}^m\,ax\cos^n ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{a(n-1)\,\text{sen}^{m-1}\,ax\cos^{n-1}ax} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\displaystyle\int \dfrac{dx}{\text{sen}^m\,ax\cos^{n-2}ax} \\ \dfrac{-1}{a(m-1)\,\text{sen}^{m-1}\,ax\cos^{n-1}ax} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\displaystyle\int \dfrac{dx}{\text{sen}^{m-2}\,ax\cos^{n}ax} \end{cases} \quad [m, n \neq 1]$$

20 Integrais envolvendo tg *ax*

17.20.1 $$\int \text{tg}\,ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax = \frac{1}{a}\ln\sec ax$$

17.20.2 $$\int \text{tg}^2\,ax\,dx = \frac{\text{tg}\,ax}{a} - x$$

17.20.3 $$\int \text{tg}^3\,ax\,dx = \frac{\text{tg}^2\,ax}{2a} + \frac{1}{a}\ln\cos ax$$

17.20.4 $$\int \text{tg}^n\,ax\sec^2 ax\,dx = \frac{\text{tg}^{n+1}\,ax}{(n+1)a}$$

17.20.5 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 ax}{\operatorname{tg} ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg} ax$

17.20.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax} = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} ax$

17.20.7 $\displaystyle\int x \operatorname{tg} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^3}{3} + \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.20.8 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} ax}{x}\,dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.20.9 $\displaystyle\int x \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{x \operatorname{tg} ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax - \frac{x^2}{2}$

17.20.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{p + q\operatorname{tg} ax} = \frac{px}{p^2+q^2} + \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(q \operatorname{sen} ax + p\cos ax)$

17.20.11 $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx$ $[n \neq 1]$

21 Integrais envolvendo cotg *ax*

17.21.1 $\displaystyle\int \operatorname{cotg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} ax$

17.21.2 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} - x$

17.21.3 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^2 ax}{2a} - \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} ax$

17.21.4 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n ax \operatorname{cosec}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n+1} ax}{(n+1)a}$

17.21.5 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cosec}^2 ax}{\operatorname{cotg} ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln \operatorname{cotg} ax$

17.21.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cotg} ax} = -\frac{1}{a}\ln\cos ax$

17.21.7 $\displaystyle\int x \operatorname{cotg} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cdots\right\}$

17.21.8 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \cdots$

17.21.9 $\displaystyle\int x \operatorname{cotg}^2 ax\,dx = -\frac{x \operatorname{cotg} ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{sen} ax - \frac{x^2}{2}$

17.21.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{p + q\operatorname{cotg} ax} = \frac{px}{p^2+q^2} - \frac{q}{a(p^2+q^2)}\ln(q \operatorname{sen} ax + q\cos ax)$

17.21.11 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} ax\,dx$ $[n \neq 1]$

22 Integrais envolvendo sec ax

17.22.1 $\displaystyle\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax) = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

17.22.2 $\displaystyle\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a}$

17.22.3 $\displaystyle\int \sec^3 ax\,dx = \frac{\sec ax\operatorname{tg} ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax)$

17.22.4 $\displaystyle\int \sec^n ax\operatorname{tg} ax\,dx = \frac{\sec^n ax}{na}$

17.22.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sec ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$

17.22.6 $\displaystyle\int x\sec ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2}+\frac{(ax)^4}{8}+\frac{5(ax)^6}{144}+\cdots+\frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!}+\cdots\right\}$

17.22.7 $\displaystyle\int \frac{\sec ax}{x}\,dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{4}+\frac{5(ax)^4}{96}+\frac{61(ax)^6}{4320}+\cdots+\frac{E_n(ax)^{2n}}{2n(2n)!}+\cdots$

17.22.8 $\displaystyle\int x\sec^2 ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax$

17.22.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{q+p\sec ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q}\int\frac{dx}{p+q\cos ax}$

17.22.10 $\displaystyle\int \sec^n ax\,dx = \frac{\sec^{n-2} ax\operatorname{tg} ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\,dx$ $[n \neq 1]$

23 Integrais envolvendo cosec ax

17.23.1 $\displaystyle\int \operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{cosec} ax - \operatorname{cotg} ax) = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

17.23.2 $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a}$

17.23.3 $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{cosec} ax\operatorname{cotg} ax}{2a} + \frac{1}{2a}\ln\operatorname{tg}\frac{ax}{2}$

17.23.4 $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^n ax\operatorname{cotg} ax\,dx = -\frac{\operatorname{cosec}^n ax}{na}$

17.23.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} ax} = -\frac{\cos ax}{a}$

17.23.6 $\displaystyle\int x\operatorname{cosec} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax+\frac{(ax)^3}{18}+\frac{7(ax)^5}{1800}+\cdots+\frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right\}$

17.23.7 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cosec} ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax}+\frac{ax}{6}+\frac{7(ax)^3}{1080}+\cdots+\frac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}+\cdots$

17.23.8 $\int x \operatorname{cosec}^2 ax\, dx = -\frac{x \operatorname{cotg} ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \operatorname{sen} ax$

17.23.9 $\int \frac{dx}{q + p \operatorname{cosec} ax} = \frac{x}{q} - \frac{p}{q} \int \frac{dx}{p + q \operatorname{sen} ax}$ (Ver 17.17.22.)

17.23.10 $\int \operatorname{cosec}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2} ax \operatorname{cotg} ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} ax\, dx$ $[n \neq 1]$

24 Integrais envolvendo funções trigonométricas inversas

17.24.1 $\int \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$

17.24.2 $\int x \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$

17.24.3 $\int x^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$

17.24.4 $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x/a)}{x}\, dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 (x/a)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (x/a)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \cdots$

17.24.5 $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x/a)}{x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{arc\,sen}(x/a)}{x} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$

17.24.6 $\int \left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$

17.24.7 $\int \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$

17.24.8 $\int x \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$

17.24.9 $\int x^2 \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} - \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$

17.24.10 $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}(x/a)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln x - \int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x/a)}{x}\, dx$ (Ver 17.24.4.)

17.24.11 $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}(x/a)}{x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{arc\,cos}(x/a)}{x} + \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$

17.24.12 $\int \left(\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}$

17.24.13 $\int \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$

17.24.14 $\int x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$

17.24.15 $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x^2 + a^2)$

17.24.16 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(x/a)}{x}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots$

17.24.17 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(x/a)}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right)$

17.24.18 $\int \text{arc cotg}\,\frac{x}{a}\,dx = x\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$

17.24.19 $\int x\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$

17.24.20 $\int x^2\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$

17.24.21 $\int \frac{\text{arc cotg}\,(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\text{arc tg}\,(x/a)}{x}\,dx$ (Ver 17.24.16.)

17.24.22 $\int \frac{\text{arc cotg}\,(x/a)}{x^2}\,dx = \frac{\text{arc cotg}\,(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$

17.24.23 $\int \text{arc sec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & \frac{\pi}{2} < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.24 $\int x\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \frac{\pi}{2} < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.25 $\int x^2\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & \frac{\pi}{2} < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.26 $\int \frac{\text{arc sec}\,(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot3\cdot3} + \frac{1\cdot3(a/x)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} + \frac{1\cdot3\cdot5(a/x)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots$

17.24.27 $\int \frac{\text{arc sec}\,(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\text{arc sec}\,(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\text{arc sec}\,(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & \frac{\pi}{2} < \text{arc sec}\,\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.28 $\int \text{arc cosec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\frac{\pi}{2} < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.29 $\int x\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & -\frac{\pi}{2} < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.30

$$\int x^2\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\frac{\pi}{2} < \text{arc cosec}\,\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

17.24.31 $\displaystyle\int \frac{\text{arc cosec}\,(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots\right)$

17.24.32 $\displaystyle\int \frac{\text{arc cosec}\,(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\text{arc cosec}\,(x/a)}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \text{arc cosec}\,\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\text{arc cosec}\,(x/a)}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & -\dfrac{\pi}{2} < \text{arc cosec}\,\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.33 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

17.24.34 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc cos}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

17.24.35 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$

17.24.36 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$

17.24.37 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc sec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\,\text{arc sec}\,(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \text{arc sec}\,\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\,\text{arc sec}\,(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & \dfrac{\pi}{2} < \text{arc sec}\,\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.38 $\displaystyle\int x^m \,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\,\text{arc sec}\,(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \text{arc cosec}\,\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\,\text{arc cosec}\,(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & -\dfrac{\pi}{2} < \text{arc cosec}\,\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$

25 Integrais envolvendo e^{ax}

17.25.1 $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$

17.25.2 $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$

17.25.3 $\displaystyle\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

17.25.4 $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

$\displaystyle = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right)$ [n = inteiro positivo]

17.25.5 $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$

17.25.6 $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx$ [$n \neq 1$]

17.25.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{p+qe^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax})$

17.25.8 $\displaystyle\int \frac{dx}{(p+qe^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p+qe^{ax})} - \frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax})$

17.25.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{pe^{ax}+qe^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{pq}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}e^{ax}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{-pq}}\ln\left(\frac{e^{ax}-\sqrt{-q/p}}{e^{ax}+\sqrt{-q/p}}\right)$

17.25.10 $\displaystyle\int e^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

17.25.11 $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\,\text{sen}\,bx)}{a^2+b^2}$

17.25.12 $\displaystyle\int xe^{ax}\,\text{sen}\,bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\,\text{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\,\text{sen}\,bx - 2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

17.25.13 $\displaystyle\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\cos bx + b\,\text{sen}\,bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\,\text{sen}\,bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

17.25.14 $\displaystyle\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$

17.25.15 $\displaystyle\int e^{ax}\,\text{sen}^n\,bx\,dx = \frac{e^{ax}\,\text{sen}^{n-1}\,bx}{a^2+n^2b^2}(a\,\text{sen}\,bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\,\text{sen}^{n-2}bx\,dx$

17.25.16 $\displaystyle\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\,\text{sen}\,bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$

26 Integrais envolvendo $\ln x$

17.26.1 $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

17.26.2 $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

17.26.3 $\displaystyle\int x^m\ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)$ $[m \neq -1]$

17.26.4 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

17.26.5 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

17.26.6 $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

17.26.7 $\displaystyle\int \frac{\ln^n x\,dx}{x} = \frac{\ln^{n+1}x}{n+1}$ $[n \neq -1]$

17.26.8 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$

17.26.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2\bullet 2!} + \frac{\ln^3 x}{3\bullet 3!} + \cdots$

17.26.10 $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + (m+1)\ln x + \frac{(m+1)^2\ln^2 x}{2\bullet 2!} + \frac{(m+1)^3\ln^3 x}{3\bullet 3!} + \cdots$

17.26.11 $\displaystyle\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1}x\,dx$

17.26.12 $\int x^m \ln^n x\,dx = \dfrac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \dfrac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x dx$ $\quad [m \neq -1]$

17.26.13 $\int \ln(x^2+a^2)\,dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a \text{ arc tg } \dfrac{x}{a}$

17.26.14 $\int \ln(x^2-a^2)\,dx = x\ln(x^2-a^2) - 2x + a \ln\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)$

17.26.15 $\int x^m \ln(x^2 \pm a^2)\,dx = \dfrac{x^{m+1}\ln(x^2\pm a^2)}{m+1} - \dfrac{2}{m+1}\int \dfrac{x^{m+2}}{x^2\pm a^2}\,dx$

27 Integrais envolvendo senh ax

17.27.1 $\int \operatorname{senh} ax\,dx = \dfrac{\cosh ax}{a}$

17.27.2 $\int x \operatorname{senh} ax\,dx = \dfrac{x\cosh ax}{a} - \dfrac{\operatorname{senh} ax}{a^2}$

17.27.3 $\int x^2 \operatorname{senh} ax\,dx = \left(\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{2}{a^3}\right)\cosh ax - \dfrac{2x}{a^2}\operatorname{senh} ax$

17.27.4 $\int \dfrac{\operatorname{senh} ax}{x}\,dx = ax + \dfrac{(ax)^3}{3\bullet 3!} + \dfrac{(ax)^5}{5\bullet 5!} + \cdots$

17.27.5 $\int \dfrac{\operatorname{senh} ax}{x^2}\,dx = -\dfrac{\operatorname{senh} ax}{x} + a\int \dfrac{\cosh ax}{x}\,dx$ $\quad$ (Ver 17.28.4.)

17.27.6 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{senh} ax} = \dfrac{1}{a}\ln \operatorname{tgh}\dfrac{ax}{2}$

17.27.7 $\int \dfrac{x\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \dfrac{1}{a^2}\left\{ax - \dfrac{(ax)^3}{18} + \dfrac{7(ax)^5}{1800} - \cdots + \dfrac{2(-1)^n(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.27.8 $\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \dfrac{\operatorname{senh} ax\cosh ax}{2a} - \dfrac{x}{2}$

17.27.9 $\int x\operatorname{senh}^2 ax\,dx = \dfrac{x\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \dfrac{\cosh 2ax}{8a^2} - \dfrac{x^2}{4}$

17.27.10 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax} = -\dfrac{\operatorname{cotgh} ax}{a}$

17.27.11 $\int \operatorname{senh} ax \operatorname{senh} px\,dx = \dfrac{\operatorname{senh}(a+p)x}{2(a+p)} - \dfrac{\operatorname{senh}(a-p)x}{2(a-p)}$ $\quad [a \neq \pm p]$

17.27.12 $\int x^m \operatorname{senh} ax\,dx = \dfrac{x^m\cosh ax}{a} - \dfrac{m}{a}\int x^{m-1}\cosh ax\,dx$ $\quad$ (Ver 17.28.12.)

17.27.13 $\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \dfrac{\operatorname{senh}^{n-1} ax\cosh ax}{an} - \dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx$

17.27.14 $\int \dfrac{\operatorname{senh} ax}{x^n}\,dx = \dfrac{-\operatorname{senh} ax}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{a}{n-1}\int \dfrac{\cosh ax}{x^{n-1}}\,dx$ $\quad$ (Ver 17.28.14.)

17.27.15 $\int \dfrac{dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \dfrac{-\cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$

17.27.16 $\int \dfrac{x\,dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \dfrac{-x\cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \dfrac{1}{a^2(n-1)(n-2)\operatorname{senh}^{n-2} ax} - \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{x\,dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$

28 Integrais envolvendo cosh *ax*

17.28.1 $\int \cosh ax\, dx = \dfrac{\operatorname{senh} ax}{a}$

17.28.2 $\int x \cosh ax\, dx = \dfrac{x \operatorname{senh} ax}{a} - \dfrac{\cosh ax}{a^2}$

17.28.3 $\int x^2 \cosh ax\, dx = -\dfrac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{2}{a^3}\right) \operatorname{senh} ax$

17.28.4 $\int \dfrac{\cosh ax}{x}\, dx = \ln x + \dfrac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \dfrac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \dfrac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$

17.28.5 $\int \dfrac{\cosh ax}{x^2}\, dx = -\dfrac{\cosh ax}{x} + a \int \dfrac{\operatorname{senh} ax}{x}\, dx$ (Ver 17.27.4.)

17.28.6 $\int \dfrac{dx}{\cosh ax} = \dfrac{2}{a} \operatorname{arc\,tg} e^{ax}$

17.28.7 $\int \dfrac{x\, dx}{\cosh ax} = \dfrac{1}{a^2} \left\{ \dfrac{(ax)^2}{2} - \dfrac{(ax)^4}{8} + \dfrac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \dfrac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots \right\}$

17.28.8 $\int \cosh^2 ax\, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{senh} ax \cosh ax}{2a}$

17.28.9 $\int x \cosh^2 ax\, dx = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x \operatorname{senh} 2ax}{4a} - \dfrac{\cosh 2ax}{8a^2}$

17.28.10 $\int \dfrac{dx}{\cosh^2 ax} = \dfrac{\operatorname{tgh} ax}{a}$

17.28.11 $\int \cosh ax \cosh px\, dx = \dfrac{\operatorname{senh}(a-p)x}{2(a-p)} + \dfrac{\operatorname{senh}(a+p)x}{2(a+p)}$

17.28.12 $\int x^m \cosh ax\, dx = \dfrac{x^m \operatorname{senh} ax}{a} - \dfrac{m}{a} \int x^{m-1} \operatorname{senh} ax\, dx$ (Ver 17.27.12.)

17.28.13 $\int \cosh^n ax\, dx = \dfrac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{an} + \dfrac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax\, dx$

17.28.14 $\int \dfrac{\cosh ax}{x^n}\, dx = \dfrac{-\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{a}{n-1} \int \dfrac{\operatorname{senh} ax}{x^{n-1}}\, dx$ (Ver 17.27.14.) $[n \neq 1]$

17.28.15 $\int \dfrac{dx}{\cosh^n ax} = \dfrac{\operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \dfrac{dx}{\cosh^{n-2} ax}$ $[n \neq 1]$

17.28.16 $\int \dfrac{x\, dx}{\cosh^n ax} = \dfrac{x \operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \dfrac{1}{(n-1)(n-2)a^2 \cosh^{n-2} ax} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \dfrac{x\, dx}{\cosh^{n-2} ax}$ $[n \neq 1, 2]$

29 Integrais envolvendo senh *ax* e cosh *ax*

17.29.1 $\int \operatorname{senh} ax \cosh ax\, dx = \dfrac{\operatorname{senh}^2 ax}{2a}$

17.29.2 $\int \operatorname{senh} px \cosh qx\, dx = \dfrac{\cosh(p+q)x}{2(p+q)} + \dfrac{\cosh(p-q)x}{2(p-q)}$ $[p \neq \pm q]$

17.29.3 $\int \operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax\, dx = \dfrac{\operatorname{senh} 4ax}{32a} - \dfrac{x}{8}$

17.29.4 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax \cosh ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tgh} ax$

17.29.5 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2 \operatorname{cotgh} 2ax}{a}$

17.29.6 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}^2 ax}{\cosh ax}\, dx = \frac{\operatorname{senh} ax}{a} \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \operatorname{senh} ax$

17.29.7 $\displaystyle\int \frac{\cosh^2 ax}{\operatorname{senh} ax}\, dx = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tgh} \frac{ax}{2}$

30 Integrais envolvendo tgh *ax*

17.30.1 $\displaystyle\int \operatorname{tgh} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax$

17.30.2 $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{tgh} ax}{a}$

17.30.3 $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^3 ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax - \frac{\operatorname{tgh}^2 ax}{2a}$

17.30.4 $\displaystyle\int x \operatorname{tgh} ax\, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\}$

17.30.5 $\displaystyle\int x \operatorname{tgh}^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \operatorname{tgh} ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cosh ax$

17.30.6 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tgh} ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.30.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{p + q \operatorname{tgh} ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln (q \operatorname{senh} ax + p \cosh ax)$ $[p \neq \pm q]$

17.30.8 $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^n ax\, dx = \frac{-\operatorname{tgh}^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \operatorname{tgh}^{n-2} ax\, dx$ $[n \neq 1]$

31 Integrais envolvendo cotgh *ax*

17.31.1 $\displaystyle\int \operatorname{cotgh} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{senh} ax$

17.31.2 $\displaystyle\int \operatorname{cotgh}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{cotgh} ax}{a}$

17.31.3 $\displaystyle\int \operatorname{cotgh}^3 ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{senh} ax - \frac{\operatorname{cotgh}^2 ax}{2a}$

17.31.4 $\displaystyle\int x \operatorname{cotgh} ax\, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ ax + \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\}$

17.31.5 $\displaystyle\int x \operatorname{cotgh}^2 ax\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x \operatorname{cotgh} ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \operatorname{senh} ax$

17.31.6 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotgh} ax}{x}\, dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \cdots \frac{(-1)^n 2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.31.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{p + q \operatorname{cotgh} ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln (p \operatorname{senh} ax + q \cosh ax)$ $[p \neq \pm q]$

17.31.8 $\int \operatorname{cotgh}^n ax\, dx = -\dfrac{\operatorname{cotgh}^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \operatorname{cotgh}^{n-2} ax\, dx \qquad [n \neq 1]$

32 Integrais envolvendo sech *ax*

17.32.1 $\int \operatorname{sech} ax\, dx = \dfrac{2}{a} \operatorname{arc\,tg} e^{ax}$

17.32.2 $\int \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \dfrac{\operatorname{tgh} ax}{a}$

17.32.3 $\int \operatorname{sech}^3 ax\, dx = \dfrac{\operatorname{sech} ax \operatorname{tgh} ax}{2a} + \dfrac{1}{2a} \operatorname{arc\,tg}\ \operatorname{senh} ax$

17.32.4 $\int x \operatorname{sech} ax\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left\{\dfrac{(ax)^2}{2} - \dfrac{(ax)^4}{8} + \dfrac{5(ax)^6}{144} + \cdots \dfrac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.32.5 $\int x \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \dfrac{x \operatorname{tgh} ax}{a} - \dfrac{1}{a^2} \ln \cosh ax$

17.32.6 $\int \dfrac{\operatorname{sech} ax}{x}\, dx = \ln x - \dfrac{(ax)^2}{4} + \dfrac{5(ax)^4}{96} - \dfrac{61(ax)^6}{4320} + \cdots \dfrac{(-1)^n E_n (ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots$

17.32.7 $\int \operatorname{sech}^n ax\, dx = \dfrac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \operatorname{tgh} ax}{a(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax\, dx \qquad [n \neq 1]$

33 Integrais envolvendo cosech *ax*

17.33.1 $\int \operatorname{cosech} ax\, dx = \dfrac{1}{a} \ln \operatorname{tgh} \dfrac{ax}{2}$

17.33.2 $\int \operatorname{cosech}^2 ax\, dx = -\dfrac{\operatorname{cotgh} ax}{a}$

17.33.3 $\int \operatorname{cosech}^3 ax\, dx = -\dfrac{\operatorname{cosech} ax \operatorname{cotgh} ax}{2a} - \dfrac{1}{2a} \ln \operatorname{tgh} \dfrac{ax}{2}$

17.33.4 $\int x \operatorname{cosech} ax\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left\{ax - \dfrac{(ax)^3}{18} + \dfrac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \dfrac{2(-1)^n (2^{2n-1}-1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.33.5 $\int x \operatorname{cosech}^2 ax\, dx = -\dfrac{x \operatorname{cotgh} ax}{a} + \dfrac{1}{a^2} \ln \operatorname{senh} ax$

17.33.6 $\int \dfrac{\operatorname{cosech} ax}{x}\, dx = -\dfrac{1}{ax} - \dfrac{ax}{6} + \dfrac{7(ax)^3}{1080} + \cdots \dfrac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.33.7 $\int \operatorname{cosech}^n ax\, dx = \dfrac{-\operatorname{cosech}^{n-2} ax \operatorname{cotgh} ax}{a(n-1)} - \dfrac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosech}^{n-2} ax\, dx \qquad [n \neq 1]$

34 Integrais envolvendo funções hiperbólicas inversas

17.34.1 $\int \operatorname{arc\,senh} \dfrac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,senh} \dfrac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}$

17.34.2 $\int x \operatorname{arc\,senh} \dfrac{x}{a}\, dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}\right) \operatorname{arc\,senh} \dfrac{x}{a} - x \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{4}$

17.34.3 $$\int \frac{\text{arc senh}\,(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{2\cdot3\cdot3} + \dfrac{1\cdot3(x/a)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(x/a)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots & |x| < a \\ \dfrac{\ln^2(2x/a)}{2} - \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots & x > a \\ -\dfrac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} - \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} - \cdots & x < -a \end{cases}$$

17.34.4 $$\int \text{arc cosh}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\,\text{arc cosh}\,(x/a) - \sqrt{x^2-a^2} & \text{arc cosh}\,(x/a) > 0 \\ x\,\text{arc cosh}\,(x/a) + \sqrt{x^2-a^2} & \text{arc cosh}\,(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.5 $$\int x\,\text{arc cosh}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\,\text{arc cosh}\,(x/a) - \dfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2} & \text{arc cosh}\,(x/a) > 0 \\ \dfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\,\text{arc cosh}\,(x/a) + \dfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2} & \text{arc cosh}\,(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.6 $$\int \frac{\text{arc cosh}\,(x/a)}{x}\,dx = \pm\left[\frac{1}{2}\ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \frac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots\right]$$

$+$ se $\text{arc cosh}\,(x/a) > 0$, $-$ se $\text{arc cosh}\,(x/a) < 0$

17.34.7 $$\int \text{arc tgh}\,\frac{x}{a}\,dx = x\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$$

17.34.8 $$\int x\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2-a^2)\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a}$$

17.34.9 $$\int \frac{\text{arc tgh}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} + \cdots$$

17.34.10 $$\int \text{arc cotgh}\,\frac{x}{a}\,dx = x\,\text{arc tgh}\,x + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$$

17.34.11 $$\int x\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2-a^2)\,\text{arc tgh}\,\frac{x}{a}$$

17.34.12 $$\int \frac{\text{arc cotgh}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{3^2} + \frac{(a/x)^5}{5^2} + \cdots\right)$$

17.34.13 $$\int \text{arc sech}\,\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\,\text{arc sech}\,(x/a) + a\,\text{arc sen}\,(x/a) & \text{arc sech}\,(x/a) > 0 \\ x\,\text{arc sech}\,(x/a) - a\,\text{arc sen}\,(x/a) & \text{arc sech}\,(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.14 $$\int \text{arc cosech}\,\frac{x}{a}\,dx = x\,\text{arc cosech}\,\frac{x}{a} \pm a\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a} \qquad (+\text{se } x > 0, -\text{ se } x < 0)$$

17.34.15 $$\int x^m\,\text{arc senh}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\,\text{arc senh}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

17.34.16 $$\int x^m \text{ arc cosh } \frac{x}{a}\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc cosh } \dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx & \text{arc cosh}\,(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc cosh } \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx & \text{arc cosh}\,(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.17 $$\int x^m \text{ arc tgh } \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc tgh } \frac{x}{a} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{a^2 - x^2}\, dx$$

17.34.18 $$\int x^m \text{ arc cotgh } \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc cotgh } \frac{x}{a} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{a^2 - x^2}\, dx$$

17.34.19 $$\int x^m \text{ arc sech } \frac{x}{a}\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc sech } \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{m+1} \displaystyle\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{arc sech}\,(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc sech } \dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{m+1} \displaystyle\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{arc sech}\,(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.20 $$\int x^m \text{ arc cosech } \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{ arc cosech } \frac{x}{a} \pm \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad (+\text{se } x > 0,\ -\text{se } x < 0)$$

18 Integrais Definidas

Definição de uma integral definida

Seja $f(x)$ definida em um intervalo $a \leqq x \leqq b$. Divida o intervalo em n partes iguais de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Então a *integral definida* de $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é definida por

18.1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\{f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \cdots + f(a+(n-1)\,\Delta x)\,\Delta x\}$$

O limite sempre existe se $f(x)$ é contínua por pares.

Se $f(x) = \dfrac{d}{dx}g(x)$, então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a integral definida acima pode ser calculada usando o resultado

18.2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}g(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Se o intervalo é infinito ou se $f(x)$ apresenta alguma singularidade em algum ponto no intervalo, a integral definida é chamada de *integral imprópria* e pode ser definida usando-se processos de limites apropriados. Por exemplo,

18.3 $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

18.4 $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

18.5 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\alpha^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$ se b é um ponto singular

18.6 $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$ se a é um ponto singular

Fórmulas gerais envolvendo integrais definidas

18.7 $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \cdots\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \int_a^b h(x)\,dx \pm \cdots$$ [finitas parcelas]

18.8 $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$ onde c é qualquer constante

18.9 $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

18.10 $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

18.11 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

18.12 $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$ onde c é algum ponto entre a e b

Isto é o *teorema do valor médio para integrais definidas*, válido se $f(x)$ for contínua em $a \leqq x \leqq b$.

18.13 $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ onde c é algum ponto entre a e b

Esta é uma generalização de 18.12, válida se $f(x)$ e $g(x)$ forem contínuas em $a \leqq x \leqq b$ e $g(x) \geqq 0$.

Regra de Leibniz para a derivação de integrais

18.14 $$\frac{d}{d\alpha}\int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x,\alpha)\,dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{d\alpha}\,dx + F(\phi_2,\alpha)\frac{d\phi_2}{d\alpha} - F(\phi_1,\alpha)\frac{d\phi_1}{d\alpha}$$

Fórmulas para cálculo aproximado de integrais definidas

Nas fórmulas seguintes, o intervalo de $x = a$ a $x = b$ é subdividido em n partes iguais pelos pontos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ e tomamos $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\ldots$, $y_n = f(x_n)$, $h = (b-a)/n$.

Fórmula retangular:

18.15 $\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$

Fórmula trapezoidal:

18.16 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$

Fórmula de Simpson (ou fórmula parabólica) para *n* par:

18.17 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

Integrais definidas envolvendo expressões racionais ou irracionais

18.18 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$

18.19 $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$ $0 < p < 1$

18.20 $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{x^n + a^n} = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \operatorname{sen}[(m+1)\pi/n]}$ $0 < m+1 < n$

18.21 $\int_0^\infty \frac{x^m dx}{1+2x\cos\beta + x^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi}\,\frac{\operatorname{sen} m\beta}{\operatorname{sen}\beta}$

18.22 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

18.23 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$

18.24 $\int_0^a x^m(a^n - x^n)^p\,dx = \frac{a^{m+1+np}\Gamma[(m+1)/n]\Gamma(p+1)}{n\Gamma[(m+1)/n + p + 1]}$

18.25 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{(x^n+a^n)^r} = \frac{(-1)^{r-1}\pi a^{m+1-nr}\,\Gamma[(m+1)/n]}{n\,\text{sen}\,[(m+1)\pi/n](r-1)!\,\Gamma[(m+1)/n-r+1]}$ $\qquad 0 < m+1 < nr$

Integrais definidas envolvendo funções trigonométricas

Todas as letras são consideradas positivas, a menos que seja indicado o contrário.

18.26 $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ inteiros e } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ inteiros e } m = n \end{cases}$

18.27 $\displaystyle\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ inteiros e } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ inteiros e } m = n \end{cases}$

18.28 $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen}\,mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ inteiros e } m+n \text{ par} \\ 2m/(m^2-n^2) & m, n \text{ inteiros e } m+n \text{ ímpar} \end{cases}$

18.29 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

18.30 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2m} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2m-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\,\frac{\pi}{2}$ $\qquad m = 1, 2, \ldots$

18.31 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2m+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2m+1}$ $\qquad m = 1, 2, \ldots$

18.32 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$

18.33 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,px}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2 & p > 0 \\ 0 & p = 0 \\ -\pi/2 & p < 0 \end{cases}$

18.34 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,px \cos qx}{x}\,dx = \begin{cases} 0 & p > q > 0 \\ \pi/2 & 0 < p < q \\ \pi/4 & p = q > 0 \end{cases}$

18.35 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,px\,\text{sen}\,qx}{x^2}\,dx = \begin{cases} \pi p/2 & 0 < p \leqq q \\ \pi q/2 & p \geqq q > 0 \end{cases}$

18.36 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2\,px}{x^2}\,dx = \frac{\pi p}{2}$

18.37 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos px}{x^2}\,dx = \frac{\pi p}{2}$

18.38 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x}\,dx = \ln\frac{q}{p}$

18.39 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi(q-p)}{2}$

18.40 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}$

18.41 $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}$

18.42 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$

18.43 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.44 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.45 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\cos^{-1}(b/a)}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.46 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\operatorname{sen} x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$

18.47 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$ $\quad 0<a<1$

18.48 $\int_0^{\pi} \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} (\pi/a)\ln(1+a) & |a|<1 \\ \pi\ln(1+1/a) & |a|>1 \end{cases}$

18.49 $\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^m}{1-a^2}$ $\quad a^2<1, \quad m=0,1,2,\ldots$

18.50 $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^2\,dx = \int_0^\infty \cos ax^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$

18.51 $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$ $\quad n>1$

18.52 $\int_0^\infty \cos ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\cos\frac{\pi}{2n}$ $\quad n>1$

18.53 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

18.54 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\operatorname{sen}(p\pi/2)}$ $\quad 0<p<1$

18.55 $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}$ $\quad 0<p<1$

18.56 $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^2\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a}-\operatorname{sen}\frac{b^2}{a}\right)$

18.57 $\int_0^\infty \cos ax^2\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a}+\operatorname{sen}\frac{b^2}{a}\right)$

18.58 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$

18.59 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3}$

18.60 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

18.61 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^m x} = \frac{\pi}{4}$

18.62 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\,dx = 2\left\{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots\right\}$

18.63 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$

18.64 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$

18.65 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x}\,dx - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \gamma$ [ver 1.3]

18.66 $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x} = \gamma$

18.67 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} px - \operatorname{arc\,tg} qx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{p}{q}$

Integrais definidas envolvendo funções exponenciais

Algumas integrais contêm a constante de Euler $\gamma = 0{,}5772156$ (ver 1.3).

18.68 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

18.69 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

18.70 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$

18.71 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$

18.72 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

18.73 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a}$

18.74 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(b^2-4ac)/4a}\operatorname{erfc}\frac{b}{2\sqrt{a}}$ [ver 36.4]

18.75 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{(b^2-4ac)/4a}$

18.76 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$

18.77 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}$

18.78 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+b/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$

18.79 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

18.80 $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x - 1}\,dx = \Gamma(n)\left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots\right)$$

Para n par, isto pode ser somado em termos dos números de Bernoulli [ver 23.1 e 2].

18.81 $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

18.82 $$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x + 1}\,dx = \Gamma(n)\left(\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \cdots\right)$$

Para alguns valores inteiros positivos de n, a série pode ser somada [ver 23.10].

18.83 $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{e^{2\pi x} - 1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{cotgh}\frac{m}{2} - \frac{1}{2m}$$

18.84 $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \gamma$$

18.85 $$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-x}}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\gamma$$

18.86 $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \gamma$$

18.87 $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x \sec px}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2 + p^2}{a^2 + p^2}\right)$$

18.88 $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x \operatorname{cosec} px}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{p} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{p}$$

18.89 $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(1 - \cos x)}{x^2}\,dx = \operatorname{arc\,cotg} a - \frac{a}{2}\ln(a^2 + 1)$$

Integrais definidas envolvendo funções logarítmicas

18.90 $$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \qquad m > -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se $n \neq 0, 1, 2, \ldots$ substitua $n!$ por $\Gamma(n+1)$.

18.91 $$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

18.92 $$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

18.93 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$$

18.94 $$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

18.95 $$\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx = 2 - 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12}$$

18.96 $$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

18.97 $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = -\pi^2 \operatorname{cosec} p\pi \operatorname{cotg} p\pi \qquad 0 < p < 1$$

18.98 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x}\,dx = \ln\frac{m+1}{n+1}$

18.99 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$

18.100 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\ln x\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2\ln 2)$

18.101 $\displaystyle\int_0^\infty \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)dx = \frac{\pi^2}{4}$

18.102 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

18.103 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln \operatorname{sen} x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2}(\ln\cos x)^2\,dx = \frac{\pi}{2}(\ln 2)^2 + \frac{\pi^3}{24}$

18.104 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

18.105 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ln \operatorname{sen} x\,dx = \ln 2 - 1$

18.106 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(a + b\operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^{2\pi}\ln(a+b\cos x)\,dx = 2\pi\ln(a+\sqrt{a^2-b^2})$

18.107 $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(a + b\cos x)\,dx = \pi\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)$

18.108 $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi\ln a, & a \geqq b > 0 \\ 2\pi\ln b, & b \geqq a > 0\end{cases}$

18.109 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$

18.110 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\ln\left(\frac{1+b\cos x}{1+a\cos x}\right)dx = \frac{1}{2}\{(\operatorname{arc\,cos} a)^2 - (\operatorname{arc\,cos} b)^2\}$

18.111 $\displaystyle\int_0^{a} \ln\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx = -\left(\frac{\operatorname{sen} a}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3a}{3^2} + \cdots\right)$

Ver também 18.102.

Integrais definidas envolvendo funções hiperbólicas

18.112 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{senh} bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{tgh}\frac{a\pi}{2b}$

18.113 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cosh bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{sech}\frac{a\pi}{2b}$

18.114 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}$

18.115 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n a^{n+1}}\Gamma(n+1)\left\{\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots\right\}$

Se n é um inteiro positivo ímpar, a série pode ser somada [ver 21.35 e 23.8].

18.116 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx}+1}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{cosec}\frac{a\pi}{b} - \frac{1}{2a}$

18.117 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx}-1}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2b}\operatorname{cotg}\frac{a\pi}{b}$

Outras integrais definidas

18.118 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \{f(0)-f(\infty)\}\ln\frac{b}{a}$

Esta é chamada *integral de Frullani*. Ela vale se $f'(x)$ é contínua e $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)-f(\infty)}{x}\,dx$ converge.

18.119 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

18.120 $\displaystyle\int_{-a}^{a} (a+x)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = (2a)^{m+n-1}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

19 Equações Diferenciais Básicas e suas Soluções

Equação diferencial	Solução
19.1 Equação de variáveis separáveis $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$	$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c$$
19.2 Equação linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$	$$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + c$$
19.3 Equação de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$	$$v e^{(1-n)\int P dx} = (1-n)\int Qe^{(1-n)\int P dx} dx + c$$ onde $v = y^{1-n}$. Se $n = 1$, a solução é $$\ln y = \int (Q - P)\, dx + c$$
19.4 Equação exata $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ onde $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.	$$\int M\, \partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\, \partial x\right) dy = c$$ onde ∂x indica que a integração é em relação a x, mantendo y constante.
19.5 Equação homogênea $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$	$$\ln x = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c$$ onde $v = y/x$. Se $F(v) = v$, a solução é $y = cx$.
19.6 $y\, F(xy)\, dx + x\, G(xy)\, dy = 0$	$$\ln x = \int \frac{G(v)\, dv}{v\{G(v) - F(v)\}} + c$$ onde $v = xy$. Se $G(v) = F(v)$, a solução é $xy = c$.

Equação diferencial	Solução
19.7 Equação linear homogênea de segunda ordem $$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$ *a, b* são constantes reais.	Sejam m_1 e m_2 as raízes de $m^2 + am + b = 0$. Então há três casos. **Caso 1.** m_1, m_2 reais e diferentes: $$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$ **Caso 2.** m_1, m_2 reais e iguais: $$y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}$$ **Caso 3.** $m_1=p+qi$, $m_2=p-qi$: $$y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2 \operatorname{sen} qx)$$ onde $p=-a/2$, $q=\sqrt{b-a^2/4}$.
19.8 Equação linear não homogênea de segunda ordem $$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=R(x)$$ *a, b* são constantes reais.	Há três casos correspondentes aos casos do item 19.7. **Caso 1.** $$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\frac{e^{m_1x}}{m_1-m_2}\int e^{-m_1x}R(x)\,dx+\frac{e^{m_2x}}{m_2-m_1}\int e^{-m_2x}R(x)\,dx$$ **Caso 2.** $$y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}+xe^{m_1x}\int e^{-m_1x}R(x)\,dx-e^{m_1x}\int xe^{-m_1x}R(x)\,dx$$ **Caso 3.** $$y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\operatorname{sen} qx)+\frac{e^{px}\operatorname{sen} qx}{q}\int e^{-px}R(x)\cos qx\,dx-\frac{e^{px}\cos qx}{q}\int e^{-px}R(x)\operatorname{sen} qx\,dx$$
19.9 Equação de Euler ou Cauchy $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=S(x)$$	Colocando $x = e^t$, a equação torna-se $$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=S(e^t)$$ e pode ser resolvida como mostrado nos itens 19.7 e 19.8.

Equação diferencial	Solução
19.10 Equação de Bessel $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-n^2)y=0$$	$$y=c_1J_n(\lambda x)+c_2\,Y_n(\lambda x)$$ Ver 27.1 a 27.15.
19.11 Equação transformada de Bessel $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2p+1)x\frac{dy}{dx}+(a^2x^{2r}+\beta^2)y=0$$	$$y=x^{-p}\left\{c_1J_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)+c_2\,Y_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)\right\}$$ onde $q=\sqrt{p^2-\beta^2}$.
19.12 Equação de Legendre $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)\,y=0$$	$$y=c_1P_n(x)+c_2\,Q_n(x)$$ Ver 28.1 a 28.48.

Fórmulas da Análise Vetorial

20

Vetores e escalares

Diversas quantidades da Física, como temperatura, volume e rapidez, podem ser especificadas por um número real. Tais quantidades são chamadas *escalares*.

Outras quantidades, como força, velocidade e momento, requerem uma direção para poderem ser especificadas, bem como magnitude. Tais quantidades são chamadas *vetores*. Um vetor é representado por uma seta ou um segmento de reta orientado, indicando o sentido. A magnitude do vetor é determinada pelo comprimento da seta, usando-se uma unidade apropriada.

Notação para vetores

Um vetor é denotado por uma letra em negrito, como **A** (Fig. 20.1). A magnitude é denotada por $|\mathbf{A}|$ ou A. A extremidade inicial da seta é denominada *ponto inicial* e sua ponta é denominada *ponto final*.

Definições fundamentais

1. **Igualdade de vetores**. Dois vetores são iguais se tiverem a mesma magnitude, direção e sentido. Assim, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, na Fig. 20-1.

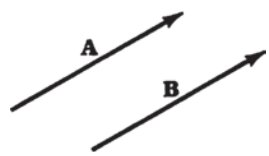


Fig. 20-1

2. **Multiplicação de um vetor por um escalar**. Se m é qualquer número real (escalar), então $m\mathbf{A}$ é um vetor cuja magnitude é $|m|$ vezes a magnitude de **A**, cuja direção é a mesma de **A** e cujo sentido é o mesmo de **A** ou o oposto de **A**, dependendo de $m > 0$ ou $m < 0$. Se $m = 0$, então $m\mathbf{A} = \mathbf{0}$ é o *vetor zero* ou *nulo*.

3. **Soma de vetores**. A soma ou resultante de **A** e **B** é o vetor $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ formado colocando-se o ponto inicial de **B** no ponto final de **A** e ligando o ponto inicial de **A** ao ponto final de **B**, como na Fig. 20-2(b). Essa definição é equivalente à lei do paralelelogramo para adição de vetores, como indicado na Fig. 20-2(c). O vetor $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é definido como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

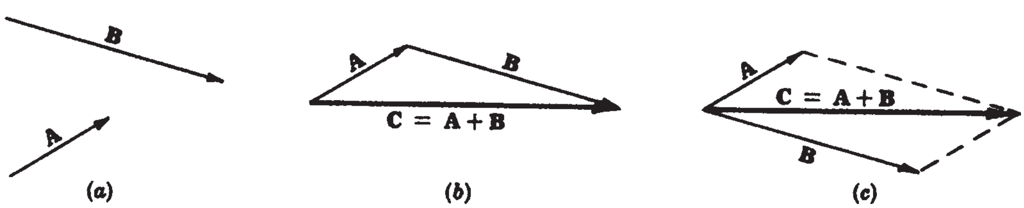
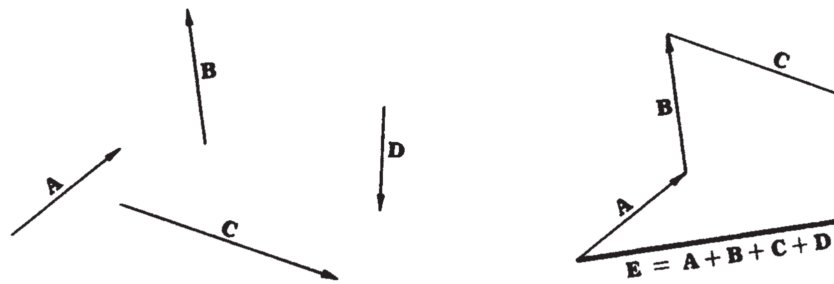


Fig. 20-2

As extensões para somas de mais de dois vetores são imediatas. Assim, a Fig. 20-3 mostra como obter a soma **E** dos vetores **A**, **B**, **C** e **D**.



(a) (b)

Fig. 20-3

4. **Vetor unitário**. Um *vetor unitário* é um vetor com magnitude unitária. Se **A** é um vetor não nulo, então um vetor unitário na direção e sentido de **A** é $\mathbf{a} = \mathbf{A}/A$, onde $A > 0$ é a magnitude de **A**.

Propriedades da álgebra vetorial

Se **A**, **B** e **C** são vetores e m e n são escalares, então:

20.1	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Comutatividade da adição
20.2	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Associatividade da adição
20.3	$m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$	Associatividade da multiplicação por escalar
20.4	$(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$	Distributividade
20.5	$m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$	Distributividade

Componentes de um vetor

Um vetor **A** pode ser representado com o ponto inicial na origem do sistema de coordenadas retangulares. Se **i**, **j** e **k** são os vetores unitários nas direções e sentidos dos semieixos x, y e z positivos, então

20.6 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

onde $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$, $A_3\mathbf{k}$ são denominados *componentes vetoriais* de **A** nas direções **i**, **j** e **k** e A_1, A_2, A_3 são denominados *componentes escalares* de **A**.

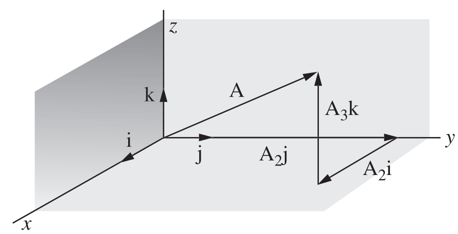


Fig. 20-4

Produto escalar

20.7 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

onde θ é o ângulo entre **A** e **B**.

Os resultados fundamentais são:

20.8	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$	Comutatividade
20.9	$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$	Distributividade

20.10 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

onde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

Produto vetorial

20.11 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{u} \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

onde θ é o ângulo entre **A** e **B** e **u** é o vetor unitário perpendicular ao plano de **A** e **B** tal que **A**, **B**, **u** forma um *sistema de mão direita* (ou seja, um parafuso padrão que for aparafusado com um movimento de **A** para **B** pelo ângulo menor do que 180°, avançará no sentido do vetor **u**, como na Fig. 20-5).

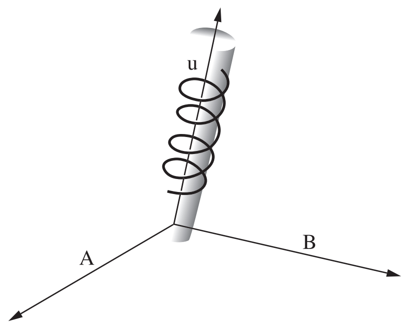


Fig. 20-5

A seguir, **resultados fundamentais**:

20.12 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

20.13 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$

20.14 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

20.15 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ = área do paralelogramo de lados **A** e **B**

Fórmulas diversas envolvendo os produtos escalar e vetorial

20.16 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$

20.17 $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ = volume do paralelepípedo de lados **A**, **B** e **C**

20.18 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

20.19 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

20.20 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

20.21 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\}$
$$= \mathbf{B}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\}$$

Derivadas de vetores

A derivada de uma função vetorial $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$ da variável escalar u é dada por

20.22 $\dfrac{d\mathbf{A}}{du} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} = \dfrac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \dfrac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \dfrac{dA_3}{du}\mathbf{k}$

Derivadas parciais de uma função vetorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ são definidas similarmente. Consideramos que todas as derivadas existem, a menos que seja especificado o contrário.

Fórmulas envolvendo derivadas

20.23 $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = \mathbf{A}\bullet\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\bullet\mathbf{B}$

20.24 $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B}$

20.25 $\dfrac{d}{du}\{\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}\times C)\} = \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\bullet(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\bullet\left(\dfrac{d\mathbf{B}}{du}\times\mathbf{C}\right) + \mathbf{A}\bullet\left(\mathbf{B}\times\dfrac{d\mathbf{C}}{du}\right)$

20.26 $\mathbf{A}\bullet\dfrac{d\mathbf{A}}{du} = A\dfrac{dA}{du}$

20.27 $\mathbf{A}\bullet\dfrac{d\mathbf{A}}{du} = 0$ *se* $|\mathbf{A}|$ é uma constante

O operador del

O operador *del* é definido por

20.28 $\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

Nos resultados abaixo, consideramos que $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ têm derivadas parciais.

O gradiente

20.29 Gradiente de U = grad $U = \nabla U = \left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$

O divergente

20.30 Divergente de $\mathbf{A}$ = div $\mathbf{A} = \nabla\bullet\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\bullet(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

O rotacional

20.31 Rotacional de $\mathbf{A}$ = rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

O Laplaciano

20.32 Laplaciano de $U = \nabla^2 U = \nabla \bullet (\nabla U) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

20.33 Laplaciano de $\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$

O operador bi-harmônico

20.34 Operador bi-harmônico em $U = \nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U)$

$$= \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2}$$

Fórmulas diversas envolvendo ∇

20.35 $\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$

20.36 $\nabla \bullet (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \bullet \mathbf{A} + \nabla \bullet \mathbf{B}$

20.37 $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

20.38 $\nabla \bullet (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \bullet \mathbf{A} + U(\nabla \bullet \mathbf{A})$

20.39 $\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$

20.40 $\nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{B})$

20.41 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \bullet \nabla)\,\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \bullet \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \bullet \mathbf{B})$

20.42 $\nabla(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\bullet\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$

20.43 $\nabla\times(\nabla U) = \mathbf{0}$, ou seja, o rotacional do gradiente de U é um vetor zero.

20.44 $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$, ou seja, o divergente do rotacional de **A** é zero.

20.45 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Integrais envolvendo vetores

Se $\mathbf{A}(u) = \dfrac{d}{du}\mathbf{B}(u)$, então a *integral indefinida* de $\mathbf{A}(u)$ é

20.46 $\int \mathbf{A}(u)du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ = vetor constante

A *integral definida* de $\mathbf{A}(u)$ de $u = a$ a $u = b$ é, neste caso, dada por

20.47 $\int_a^b \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$

A integral definida pode ser definida como no item 18.1.

Integrais de linha

Considere uma curva espacial C unindo os dois pontos $P_1(a_1, a_2, a_3)$ e $P_2(b_1, b_2, b_3)$, como na Fig. 20-6. Divida a curva em n partes pelos pontos de subdivisão $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. Então, a *integral de linha* do vetor $\mathbf{A}(x, y, z)$ ao longo de C é definida por

20.48 $\int_c \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}(x_p, y_p, z_p)\bullet\Delta\mathbf{r}_p$

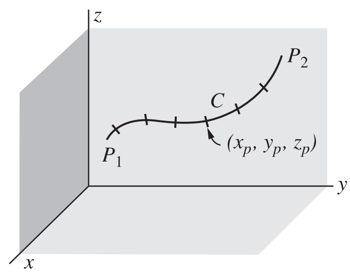


Fig. 20-6

onde $\Delta\mathbf{r}_p = \Delta x_p\mathbf{i} + \Delta y_p\mathbf{j} + \Delta z_p\mathbf{k}$, $\Delta x_p = x_{p+1} - x_p$, $\Delta y_p = y_{p+1} - y_p$, $\Delta z_p = z_{p+1} - z_p$ e onde supomos que a maior das magnitudes $|\Delta\mathbf{r}_p|$ tende a zero quando $n\to\infty$. O resultado 20.48 é uma generalização da integral definida comum (ver 18.1).

A integral de linha 20.48 também pode ser escrita como

20.49 $\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_C (A_1dx + A_2dy + A_3\,dz)$

usando-se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

Propriedades das integrais de linha

20.50 $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$

20.51 $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} + \int_{P_3}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$

Independência do caminho

Em geral, a integral de linha tem um valor dependente do particular caminho C unindo os pontos P_1 e P_2 na região $\mathcal{R}$. No entanto, no caso $\mathbf{A} = \nabla\phi$ ou $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$, onde ϕ e suas derivadas parciais são contínuas em $\mathcal{R}$, a integral de linha $\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$ é independente do caminho. Em tal caso

20.52 $\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1)$

onde $\phi(P_1)$ e $\phi(P_2)$ denotam os valores de ϕ em P_1 e P_2, respectivamente. Em particular, se C é uma curva fechada,

20.53 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$

onde o círculo no sinal da integral é usado para enfatizar que C é fechada.

Integrais múltiplas

Seja $F(x, y)$ uma função definida na região $\mathcal{R}$ do plano xy, como na Fig. 20-7. Subdivida a região em n partes por linhas paralelas aos eixos x e y, como indicado. $\Delta A_p = \Delta x_p\, \Delta y_p$ denota a área de uma dessas partes. Então a integral de $F(x, y)$ sobre $\mathcal{R}$ é definida por

20.54 $\int_{\mathcal{R}} F(x, y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} F(x_p, y_p)\Delta A_p$

supondo-se que este limite exista.

Em tais casos, a integral também pode ser escrita como

20.55 $$\int_{x=a}^{b} \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\, dy\, dx = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y)\, dy \right\} dx$$

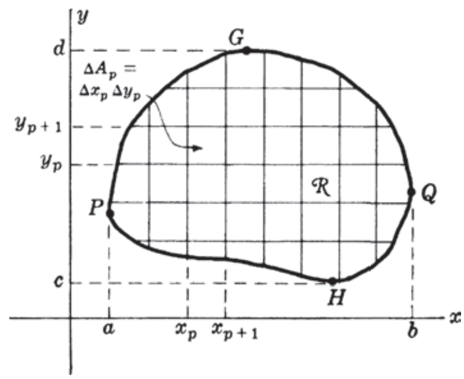


Fig. 20-7

onde $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ são as equações das curvas PHQ e PGQ, respectivamente, e a e b são as coordenadas x dos pontos P e Q. O resultado pode ser escrito como

20.56 $$\int_{y=c}^{d} \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y)\, dx \right\} dy$$

onde $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$ são as equações das curvas HPG e HQG, respectivamente, e c e d são as coordenadas y de H e G.

Estas são as chamadas *integrais duplas* ou *integrais de área*. As ideias apresentadas podem ser analogamente estendidas a *integrais triplas* ou *de volume* ou, ainda, a *integrais múltiplas*.

Integrais de superfície

Subdivida a superfície S [ver Fig. 20-8] em n elementos de área ΔS_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. Seja $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$, onde (x_p, y_p, z_p) é o ponto P em ΔS_p. Seja N_p um vetor unitário normal a ΔS_p em P. Então a integral de superfície do componente normal de $\mathbf{A}$ sobre S é definida por

20.57 $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{N}_p \Delta S_p$

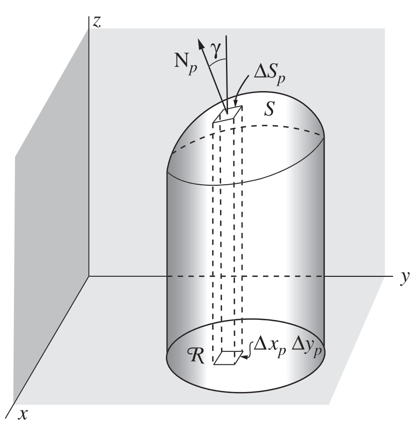


Fig. 20-8

Relação entre integrais duplas e de superfície

Se $\mathcal{R}$ é a projeção de S no plano xy, então [ver Fig. 20-8]

20.58 $$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_{\mathcal{R}} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}|}$$

O teorema da divergência

Seja S uma superfície fechada limitando uma região de volume V; então, se $\mathbf{N}$ é a normal positiva (desenhada para fora) e $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\, dS$, temos [ver Fig. 20-9]

20.59 $$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

O resultado também é chamado de *teorema de Gauss* ou de *teorema de Green*.

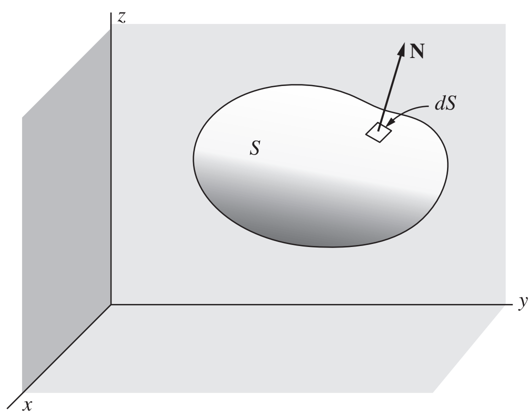


Fig. 20-9

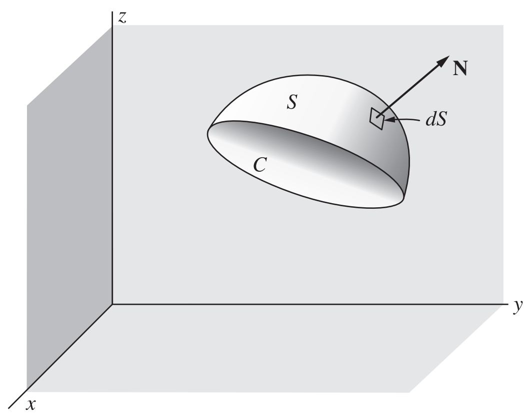


Fig. 20-10

Teorema de Stokes

Seja S uma superfície aberta de dois lados limitada por uma curva fechada C sem autointerseção (curva fechada simples), como na Fig. 20-10. Então,

20.60 $$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

onde o círculo na integral é usado para enfatizar que C é fechada.

Teorema de Green no plano

20.61 $$\oint_C (P\, dx + Q\, dy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

onde R é a área limitada pela curva fechada C. Este resultado é um caso especial do teorema de divergência ou do teorema de Stokes.

Primeira identidade de Green

20.62 $\int_V \{\phi \nabla^2 \psi + (\nabla\phi)\bullet(\nabla\psi)\} dV = \int (\phi \nabla \psi) \bullet d\mathbf{S}$

onde ϕ e ψ são funções escalares.

Segunda identidade de Green

20.63 $\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \bullet d\mathbf{S}$

Teoremas de integrais diversos

20.64 $\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$

20.65 $\int_C \phi\, d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$

Coordenadas curvilíneas

Um ponto P no espaço [ver Fig. 20-11] pode ser determinado por coordenadas retangulares (x, y, z) ou coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3), onde as equações de transformação de um terno de coordenadas para o outro são dadas por

20.66 $x = x(u_1, u_2, u_3)$

$y = y(u_1, u_2, u_3)$

$z = z(u_1, u_2, u_3)$

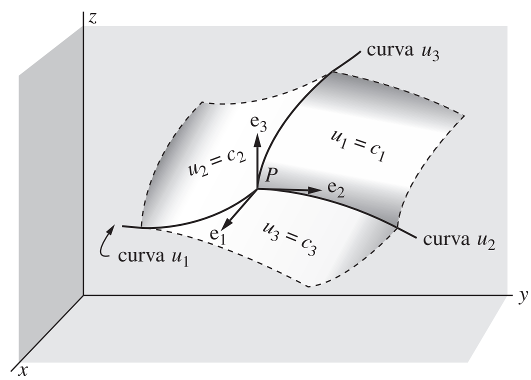


Fig. 20-11

Se u_2 e u_3 são constantes, então, quando u_1 varia, o vetor posição $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de P descreve uma curva denominada curva coordenada u_1. Analogamente, definimos as curvas coordenadas u_2 e u_3 por P. Os vetores $\partial\mathbf{r}/\partial u_1, \partial\mathbf{r}/\partial u_2, \partial\mathbf{r}/\partial u_3$ representam vetores tangentes às curvas coordenadas u_1, u_2, u_3. Se $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são os vetores unitários tangentes a essas curvas, temos

20.67 $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3$

onde

20.68 $h_1 = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right|, \quad h_2 = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right|, \quad h_3 = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$

são denominados *fatores de escala*. Se $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são mutuamente perpendiculares, o sistema de coordenadas curvilíneas é denominado *ortogonal*.

Fórmulas envolvendo coordenadas curvilíneas ortogonais

20.69 $d\mathbf{r} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1\, du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2\, \mathbf{e}_2 + h_3 du_3\, \mathbf{e}_3$

20.70 $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2$

onde ds é o elemento do comprimento de arco.

Se dV é o elemento de volume, então

20.71 $dV = |(h_1\mathbf{e}_1 du_1) \cdot (h_2\mathbf{e}_2 du_2) \times (h_3\mathbf{e}_3 du_3)| = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3$

$$= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1\, du_2\, du_3 = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1\, du_2\, du_3$$

onde

20.72 $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/du_3 \end{vmatrix}$

às vezes escrito como $J(x, y, z; u_1, u_2, u_3)$, é denominado *jacobiano* da transformação.

Transformação de integrais múltiplas

O resultado 20.72 pode ser usado para transformar integrais múltiplas de retangulares para coordenadas curvilíneas. Por exemplo,

20.73 $\displaystyle\int_{\mathscr{R}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\mathscr{R}'} G(u_1, u_2, u_3) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1\, du_2\, du_3$

onde $\mathscr{R}'$ é a região na qual $\mathscr{R}$ é mapeada pela transformação e $G(u_1, u_2, u_3)$ é o valor de $F(x, y, z)$ correspondente à transformação.

Gradiente, divergente, rotacional e Laplaciano

A seguir, Φ é uma função escalar e $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ é uma função vetorial de coordenadas curvilíneas ortogonais u_1, u_2 e u_3.

20.74 Gradiente de Φ = grad $\Phi = \nabla\Phi = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_1}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_2}\dfrac{\partial \Phi}{du_2} + \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_3}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_3}$

20.75 Divergente de $\mathbf{A}$ = div $\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$

20.76 Rotacional de $\mathbf{A}$ = rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right]\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 A_3)\right]\mathbf{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right]\mathbf{e}_3$$

20.77 Laplaciano de $\Phi = \nabla^2\Phi = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$

Observe que o operador bi-harmônico $\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$ pode ser obtido a partir da equação 20.77.

Sistemas de coordenadas ortogonais especiais

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (ver Figura 20-12)

20.78 $x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z$

20.79 $h_1^2 = 1, \qquad h_2^2 = r^2, \qquad h_3^2 = 1$

20.80 $\nabla^2\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

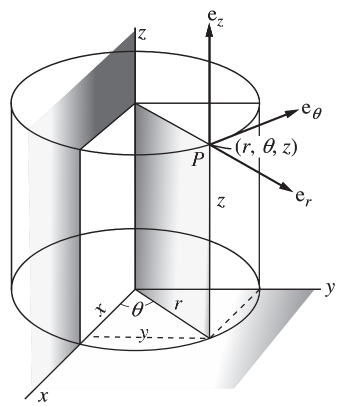


Fig. 20-12 Coordenadas cilíndricas.

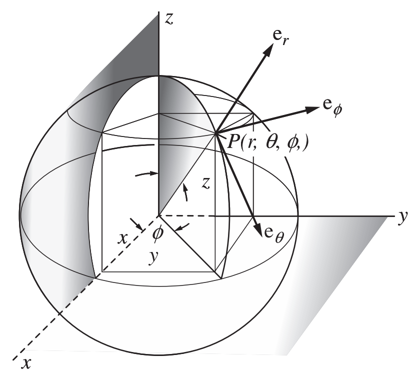


Fig. 20-13 Coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (ver Figura 20-13)

20.81 $x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = r\cos\theta$

20.82 $h_1^2 = 1, \qquad h_2^2 = r^2, \qquad h_3^2 = r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$

20.83 $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\Phi}{dr}\right) + \dfrac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$

Coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z)

20.84 $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \qquad y = uv, \qquad z = z$

20.85 $h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \qquad h_3^2 = 1$

20.86 $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

Os traços das superfícies coordenadas no plano xy são mostrados na Fig. 20-14. São parábolas confocais com eixo comum.

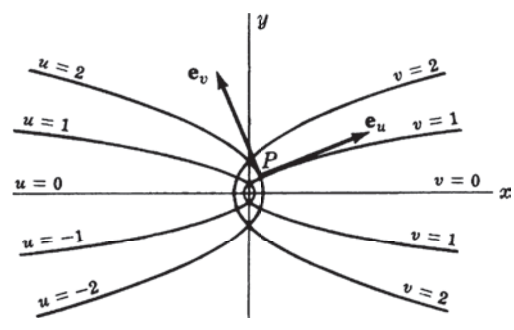


Fig. 20-14

Coordenadas paraboloidais (u, v, ϕ)

20.87 $x = uv\cos\phi, \quad y = uv\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$

onde $\quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.88 $h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \quad h_3^2 = u^2v^2$

20.89 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{v(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Dois conjuntos de superfícies coordenadas são obtidos pela rotação das parábolas da Fig. 20-14 em torno do eixo x, que passa a ser rotulado como eixo z.

Coordenadas elípticas cilíndricas (u, v, z)

20.90 $x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = z$

onde $\quad u \geqq 0, \quad 0 \leqq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

20.91 $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\mathrm{senh}^2 u + \mathrm{sen}^2 v), \qquad h_3^2 = 1$

20.92 $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\mathrm{senh}^2 u + \mathrm{sen}^2 v)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Os traços das superfícies coordenadas no plano xy são mostrados na Fig. 20-15. São elipses e hipérboles confocais.

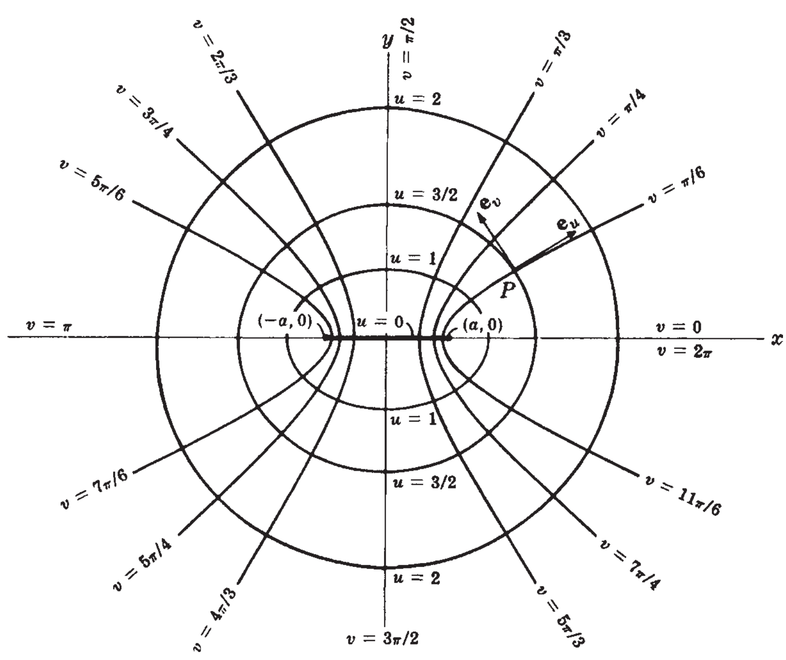


Fig. 20-15 Coordenadas elípticas cilíndricas.

Coordenadas esféricas alongadas (ξ, η, ϕ)

20.93 $x = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \cos \phi, \quad y = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \phi, \quad z = a \cosh \xi \cos \eta$

onde $\xi \geqq 0, \quad 0 \leqq \eta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.94 $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\operatorname{senh}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta), \quad h_3^2 = a^2 \operatorname{senh}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta$

20.95
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta) \operatorname{senh} \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\operatorname{senh} \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)$$
$$+ \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta) \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\operatorname{sen} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{a^2 \operatorname{senh}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

Dois conjuntos de superfícies coordenadas são obtidos pela rotação das curvas da Fig. 20-15 em torno do eixo x, que passa a ser rotulado como eixo z. O terceiro conjunto de superfícies coordenadas consiste de planos passando por este eixo.

Coordenadas esféricas achatadas (ξ, η, ϕ)

20.96 $x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi, \quad y = a \cosh \xi \cos \eta \operatorname{sen} \phi, \quad z = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta$

onde $\xi \geqq 0, \quad -\pi/2 \leqq \eta \leqq \pi/2, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.97 $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta), \quad h_3^2 = a^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta$

20.98
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta) \cosh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\cosh \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)$$
$$+ \frac{1}{a^2(\operatorname{senh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta) \cos \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\cos \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{a^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

Dois conjuntos de superfícies coordenadas são obtidos pela rotação das curvas da Fig. 20-15 em torno do eixo y, que passa a ser rotulado como eixo z. O terceiro conjunto de superfícies coordenadas consiste de planos passando por este eixo.

Coordenadas bipolares (u, v, z)

20.99 $x = \dfrac{a \operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \dfrac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u}, \quad z = z$

onde $0 \leqq u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty, \quad -\infty < z < \infty$

ou

20.100 $x^2 + (y - a \operatorname{cotg} u)^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 u, \quad (x - a \operatorname{cotgh} v)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosech}^2 v, \quad z = z$

20.101 $h_1^2 = h_2^2 = \dfrac{a^2}{(\cosh v - \cos u)^2}, \qquad h_3^2 = 1$

20.102 $\nabla^2\Phi = \dfrac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

Os traços das superfícies coordenadas no plano xy são mostrados na Fig. 20-16.

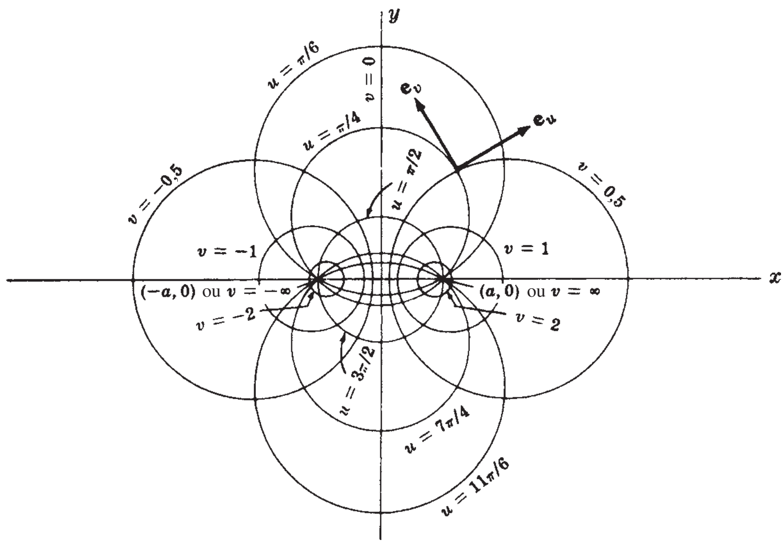


Fig. 20-16 **Coordenadas bipolares.**

Coordenadas toroidais (u, v, ϕ)

20.103 $x = \dfrac{a \operatorname{senh} v \cos\phi}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \dfrac{a \operatorname{senh} v \operatorname{sen}\phi}{\cosh v - \cos u}, \quad z = \dfrac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u}$

20.104 $h_1^2 = h_2^2 = \dfrac{a^2}{(\cosh v - \cos u)^2}, \qquad h_3^2 = \dfrac{a^2 \operatorname{senh}^2 v}{(\cosh v - \cos u)^2}$

20.105 $\nabla^2\Phi = \dfrac{(\cosh v - \cos u)^3}{a^2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh v - \cos u}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right)$

$$+\frac{(\cosh v - \cos u)^3}{a^2 \operatorname{senh} v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2 \operatorname{senh}^2 v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

As superfícies coordenadas são obtidas pela rotação das curvas da Fig. 20-16 em torno do eixo x, que passa a ser rotulado como eixo z.

Coordenadas cônicas (λ, μ, ν)

20.106 $x = \dfrac{\lambda\mu\nu}{ab}, \qquad y = \dfrac{\lambda}{a}\sqrt{\dfrac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \qquad z = \dfrac{\lambda}{b}\sqrt{\dfrac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}$

20.107 $h_1^2 = 1, \qquad h_2^2 = \dfrac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)}, \qquad h_3^2 = \dfrac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)}$

Coordenadas elipsoidais confocais (λ, μ, ν)

20.108 $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda}=1, & \lambda<c^2<b^2<a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\dfrac{y^2}{b^2-\mu}+\dfrac{z^2}{c^2-\mu}=1, & c^2<\mu<b^2<a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\nu}+\dfrac{y^2}{b^2-\nu}+\dfrac{z^2}{c^2-\nu}=1, & c^2<b^2<\nu<a^2 \end{cases}$$

ou

20.109 $$\begin{cases} x^2=\dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2=\dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(a^2-c^2)} \\ z^2=\dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

20.110 $$\begin{cases} h_1^2=\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} \\ h_2^2=\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ h_3^2=\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{4(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)} \end{cases}$$

Coordenadas paraboloidais confocais (λ, μ, ν)

20.111 $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{h^2}{b^2-\lambda}=z-\lambda, & -\infty<\lambda<b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\dfrac{y^2}{b^2-\mu}=z-\mu, & b^2<\mu<a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\nu}+\dfrac{y^2}{b^2-\nu}=z-\nu, & a^2<\nu<\infty \end{cases}$$

ou

20.112 $$\begin{cases} x^2=\dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{b^2-a^2} \\ y^2=\dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{a^2-b^2} \\ z=\lambda+\mu+\nu-a^2-b^2 \end{cases}$$

20.113 $$\begin{cases} h_1^2=\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)} \\ h_2^2=\dfrac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)} \\ h_3^2=\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{16(a^2-\nu)(b^2-\nu)} \end{cases}$$

21 Séries de Termos Constantes

Séries aritméticas

21.1 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\}=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}=\frac{1}{2}n(a+l)$

onde $l = a + (n - 1)d$ é o último termo.

Alguns casos especiais são

21.2 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

21.3 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Séries geométricas

21.4 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a-rl}{1-r}$

onde $l = ar^{n-1}$ é o último termo e $r \neq 1$.

Se $-1 < r < 1$, então

21.5 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$

Séries aritmético-geométricas

21.6 $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+\{a+(n-1)d\}r^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}+\dfrac{rd\{1-nr^{n-1}+(n-1)r^n\}}{(1-r)^2}$

onde $r \neq 1$.

Se $-1 < r < 1$, então

21.7 $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots=\dfrac{a}{1-r}+\dfrac{rd}{(1-r)^2}$

Somatórios de potências de inteiros positivos

21.8 $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\dfrac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\dfrac{B_1pn^{p-1}}{2!}-\dfrac{B_2p(p-1)(p-2)n^{p-3}}{4!}+\cdots$

onde a série termina em n^2 ou n, conforme p é ímpar ou par, e B_k são os números de Bernoulli [ver Capítulo 23].

Alguns casos especiais são

21.9 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

21.10 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21.11 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2$

21.12 $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Se $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, onde k e n são inteiros positivos, então:

21.13 $\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\cdots+\binom{k+1}{k}S_k=(n+1)^{k+1}-(n+1)$

Séries envolvendo recíprocas de potências de inteiros positivos

21.14 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\cdots=\ln 2$

21.15 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$

21.16 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{13}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+\dfrac{1}{3}\ln 2$

21.17 $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{4}$

21.18 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{14}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+\dfrac{1}{3}\ln 2$

21.19 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$

21.20 $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{90}$

21.21 $\dfrac{1}{1^6}+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{4^6}+\cdots=\dfrac{\pi^6}{945}$

21.22 $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$

21.23 $\dfrac{1}{1^4}-\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}-\dfrac{1}{4^4}+\cdots=\dfrac{7\pi^4}{720}$

21.24 $\dfrac{1}{1^6}-\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}-\dfrac{1}{4^6}+\cdots=\dfrac{31\pi^6}{30.240}$

21.25 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$

21.26 $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{96}$

21.27 $\dfrac{1}{1^6}+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{1}{7^6}+\cdots=\dfrac{\pi^6}{960}$

21.28 $\dfrac{1}{1^3}-\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\cdots=\dfrac{\pi^3}{32}$

21.29 $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{3^3}-\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{7^3}+\cdots=\dfrac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$

21.30 $\dfrac{1}{1\bullet 3}+\dfrac{1}{3\bullet 5}+\dfrac{1}{5\bullet 7}+\dfrac{1}{7\bullet 9}+\cdots=\dfrac{1}{2}$

21.31 $\dfrac{1}{1\bullet 3}+\dfrac{1}{2\bullet 4}+\dfrac{1}{3\bullet 5}+\dfrac{1}{4\bullet 6}+\cdots=\dfrac{3}{4}$

21.32 $\dfrac{1}{1^2\bullet 3^2}+\dfrac{1}{3^2\bullet 5^2}+\dfrac{1}{5^2\bullet 7^2}+\dfrac{1}{7^2\bullet 9^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2-8}{16}$

21.33 $\dfrac{1}{1^2\bullet 2^2\bullet 3^2}+\dfrac{1}{2^2\bullet 3^2\bullet 4^2}+\dfrac{1}{3^2\bullet 4^2\bullet 5^2}+\cdots=\dfrac{4\pi^2-39}{16}$

21.34 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+d}+\dfrac{1}{a+2d}-\dfrac{1}{a+3d}+\cdots=\int_0^1\dfrac{u^{a-1}du}{1+u^d}$

21.35 $\dfrac{1}{1^{2p}}+\dfrac{1}{2^{2p}}+\dfrac{1}{3^{2p}}+\dfrac{1}{4^{2p}}+\cdots=\dfrac{2^{2p-1}\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$

21.36 $\dfrac{1}{1^{2p}}+\dfrac{1}{3^{2p}}+\dfrac{1}{5^{2p}}+\dfrac{1}{7^{2p}}+\cdots=\dfrac{(2^{2p}-1)\pi^{2p}B_p}{2(2p)!}$

21.37 $\dfrac{1}{1^{2p}}-\dfrac{1}{2^{2p}}+\dfrac{1}{3^{2p}}-\dfrac{1}{4^{2p}}+\cdots=\dfrac{(2^{2p-1}-1)\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$

21.38 $\dfrac{1}{1^{2p+1}}-\dfrac{1}{3^{2p+1}}+\dfrac{1}{5^{2p+1}}-\dfrac{1}{7^{2p+1}}+\cdots=\dfrac{\pi^{2p+1}E_p}{2^{2p+2}(2p)!}$

Séries diversas

21.39 $\dfrac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}(n+1/2)\alpha}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$

21.40 $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\cdots+\operatorname{sen}n\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}[1/2(n+1)]\alpha\operatorname{sen}1/2n\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$

21.41 $1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\cdots=\dfrac{1-r\cos\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2},\quad |r|<1$

21.42 $r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+r^3\operatorname{sen}3\alpha+\cdots=\dfrac{r\operatorname{sen}\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2},\quad |r|<1$

21.43 $1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+\cdots+r^n\cos n\alpha=\dfrac{r^{n+2}\cos n\alpha-r^{n+1}\cos(n+1)\alpha-r\cos\alpha+1}{1-2r\cos\alpha+r^2}$

21.44 $r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+\cdots+r^n\operatorname{sen}n\alpha=\dfrac{r\operatorname{sen}\alpha-r^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)\alpha+r^{n+2}\operatorname{sen}n\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}$

Fórmula do somatório de Euler-Maclaurin

21.45 $$\sum_{k=1}^{n-1} F(k) = \int_0^n F(k)dk - \frac{1}{2}\{F(0) + F(n)\}$$

$$+ \frac{1}{12}\{F'(n) - F'(0)\} - \frac{1}{720}\{F'''(n) - F'''(0)\}$$

$$+ \frac{1}{30.240}\{F^{(\mathrm{v})}(n) - F^{(\mathrm{v})}(0)\} - \frac{1}{1.209.600}\{F^{(\mathrm{vii})}(n) - F^{(\mathrm{vii})}(0)\}$$

$$+ \cdots (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!}\{F^{(2p-1)}(n) - F^{(2p-1)}(0)\} + \cdots$$

Fórmula do somatório de Poisson

21.46 $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi imx} F(x)dx\right\}$$

22 Séries de Taylor

Séries de Taylor para funções de uma variável

22.1 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$

onde R_n, o enésimo resto, é dado por qualquer uma das duas formas seguintes:

22.2 **Forma de Lagrange:** $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$

22.3 **Forma de Cauchy:** $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$

O valor ξ, o qual pode ser diferente nas duas formas, fica entre a e x. O resultado é válido se $f(x)$ tem derivadas contínuas de ordem n, pelo menos.

Se $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, a série infinita obtida é denominada *série de Taylor* para $f(x)$ em $x = a$. Se $a = 0$, a série é, frequentemente, denominada *série de Maclaurin*. Essas séries são denominadas *séries de potências*, que, em geral, convergem em todos os valores de x de algum intervalo, denominado *intervalo de convergência* e divergem em todos os x fora desse intervalo.

Algumas séries contêm os números de Bernoulli B_n e os números de Euler E_n definidos no Capítulo 23.

Séries binomiais

22.4 $(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \cdots$$

Casos especiais:

22.5 $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

22.6 $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

22.7 $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

22.8 $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ $\quad -1 < x < 1$

22.9 $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$ $\quad -1 < x < 1$

22.10 $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots$ $\quad -1 < x < 1$

22.11 $(1+x)^{-1/2} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$ $\quad -1 < x \leqq 1$

22.12 $(1+x)^{1/2} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots$ $\quad -1 < x \leqq 1$

22.13 $(1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1 \bullet 4}{3 \bullet 6}x^2 - \frac{1 \bullet 4 \bullet 7}{3 \bullet 6 \bullet 9}x^3 + \cdots$ $\quad -1 < x \leqq 1$

22.14 $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3 \bullet 6}x^2 + \frac{2 \bullet 5}{3 \bullet 6 \bullet 9}x^3 - \cdots$ $\quad -1 < x \leqq 1$

Séries de funções exponenciais e logarítmicas

22.15 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.16 $a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.17 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ $\quad -1 < x \leqq 1$

22.18 $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ $\quad -1 < x < 1$

22.19 $\ln x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\}$ $\quad x > 0$

22.20 $\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots$ $\quad x \geqq \frac{1}{2}$

Séries de funções trigonométricas

22.21 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.22 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.23 $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad |x| < \frac{\pi}{2}$

22.24 $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots$ $\quad 0 < |x| < \pi$

22.25 $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad |x| < \frac{\pi}{2}$

22.26 $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15.120} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad 0 < |x| < \pi$

22.27 $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \bullet 3 \bullet 5}{2 \bullet 4 \bullet 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ $\quad |x| < 1$

22.28 $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right)$ $\quad |x| < 1$

22.29 $\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots & (+ \text{ se } x \geqq 1, - \text{ se } x \leqq -1) \end{cases}$

22.30

$$\text{arc cotg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots\right) & |x| < 1 \\ p\pi + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} - \cdots & (p = 0 \text{ se } x > 1,\ p = 1 \text{ se } x < -1) \end{cases}$$

22.31 $\text{arc sec } x = \text{arc cos}(1/x) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2 \bullet 3x^3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \bullet 4 \bullet 5x^5} + \cdots\right)$ $\quad |x| > 1$

22.32 $\text{arc cosec } x = \text{arc sen}(1/x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2 \bullet 3x^3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \bullet 4 \bullet 5x^5} + \cdots$ $\quad |x| > 1$

Séries de funções hiperbólicas

22.33 $\text{senh}\, x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.34 $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.35 $\text{tgh}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \cdots \dfrac{(-1)^{n-1} 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

22.36 $\text{cotgh}\, x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + \dfrac{2x^5}{945} + \cdots \dfrac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad 0 < |x| < \pi$

22.37 $\text{sech}\, x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} - \dfrac{61x^6}{720} + \cdots \dfrac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

22.38 $\text{cosech}\, x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} - \dfrac{31x^5}{15.120} + \cdots \dfrac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $\quad 0 < |x| < \pi$

22.39

$$\text{arc senh } x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{2 \bullet 3} + \dfrac{1 \bullet 3x^5}{2 \bullet 4 \bullet 5} - \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5x^7}{2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\left(\ln|2x| + \dfrac{1}{2 \bullet 2x^2} - \dfrac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4 \bullet 4x^4} + \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5}{2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 6x^6} - \cdots\right) & \begin{bmatrix} + \text{ se } x \geqq 1 \\ - \text{ se } x \leqq -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

22.40

$$\text{arc cosh } x = \pm\left\{\ln(2x) - \left(\frac{1}{2 \bullet 2x^2} + \frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4 \bullet 4x^4} + \frac{1 \bullet 3 \bullet 5}{2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 6x^6} + \cdots\right)\right\} \quad \begin{bmatrix} + \text{ se arc cosh } x > 0,\ x \geqq 1 \\ - \text{ se arc cosh } x < 0,\ x \geqq 1 \end{bmatrix}$$

22.41 $\text{arc tgh } x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots$ $\quad |x| < 1$

22.42 $\text{arc cotgh } x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + \dfrac{1}{7x^7} + \cdots$ $\quad |x| > 1$

Séries diversas

22.43 $e^{\text{sen}\, x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^5}{15} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.44 $e^{\cos x} = e\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{31x^6}{720} + \cdots\right)$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.45 $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

22.46 $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} - \dfrac{x^6}{90} + \cdots + \dfrac{2^{n/2}\operatorname{sen}(n\pi/4)x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

22.47 $e^x \cos x = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + \cdots + \dfrac{2^{n/2}\cos(n\pi/4)x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$

22.48 $\ln|\operatorname{sen} x| = \ln|x| - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} - \dfrac{x^6}{2835} - \cdots - \dfrac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$

22.49 $\ln|\cos x| = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} - \dfrac{17x^8}{2520} - \cdots - \dfrac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

22.50 $\ln|\operatorname{tg} x| = \ln|x| + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7x^4}{90} + \dfrac{62x^6}{2835} + \cdots + \dfrac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$

22.51 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - (1 + \tfrac{1}{2})x^2 + (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})x^3 - \cdots \qquad |x| < 1$

Inversão de séries de potência

Considere

22.52 $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + \cdots$

então,

22.53 $x = C_1y + C_2y^2 + C_3y^3 + C_4y^4 + C_5y^5 + C_6y^6 + \cdots$

onde

22.54 $c_1C_1 = 1$

22.55 $c_1^3C_2 = -c_2$

22.56 $c_1^5C_3 = 2c_2^2 - c_1c_3$

22.57 $c_1^7C_4 = 5c_1c_2c_3 - 5c_2^3 - c_1^2c_4$

22.58 $c_1^9C_5 = 6c_1^2c_2c_4 + 3c_1^2c_3^2 - c_1^3c_5 + 14c_2^4 - 21c_1c_2^2c_3$

22.59 $c_1^{11}C_6 = 7c_1^3c_2c_5 + 84c_1c_2^3c_3 + 7c_1^3c_3c_4 - 28c_1^2c_2c_3^2 - c_1^4c_6 - 28c_1^2c_2^2c_4 - 42c_2^5$

Séries de Taylor para funções de duas variáveis

22.60 $f(x, y) = f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b)$

$$+ \frac{1}{2!}\{(x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b)\} + \cdots$$

onde $f_x(a, b), f_y(a, b), \ldots$ denotam derivadas parciais em relação a $x, y, \ldots$ calculadas em $x = a$, $y = b$.

23 Números de Bernoulli e de Euler

Definição dos números de Bernoulli

Os *números de Bernoulli* $B_1, B_2, B_3, \ldots$ são definidos pelas séries

23.1 $\dfrac{x}{e^x - 1} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{B_1 x^2}{2!} - \dfrac{B_2 x^4}{4!} + \dfrac{B_3 x^6}{6!} - \cdots$ $\qquad |x| < 2\pi$

23.2 $1 - \dfrac{x}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{B_1 x^2}{2!} + \dfrac{B_3 x^4}{4!} + \dfrac{B_3 x^6}{6!} + \cdots$ $\qquad |x| < \pi$

Definição dos números de Euler

Os *números de Euler* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ são definidos pelas séries

23.3 $\operatorname{sech} x = 1 - \dfrac{E_1 x^2}{2!} + \dfrac{E_2 x^4}{4!} - \dfrac{E_3 x^6}{6!} + \cdots$ $\qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

23.4 $\sec x = 1 + \dfrac{E_1 x^2}{2!} + \dfrac{E_2 x^4}{4!} + \dfrac{E_3 x^6}{6!} + \cdots$ $\qquad |x| < \dfrac{\pi}{2}$

Tabela dos primeiros números de Bernoulli e de Euler

Números de Bernoulli	Números de Euler
$B_1 = 1/6$	$E_1 = 1$
$B_2 = 1/30$	$E_2 = 5$
$B_3 = 1/42$	$E_3 = 61$
$B_4 = 1/30$	$E_4 = 1385$
$B_5 = 5/66$	$E_5 = 50.521$
$B_6 = 691/2730$	$E_6 = 2.702.765$
$B_7 = 7/6$	$E_7 = 199.360.981$
$B_8 = 3617/510$	$E_8 = 19.391.512.145$
$B_9 = 43.867/798$	$E_9 = 2.404.879.675.441$
$B_{10} = 174.611/330$	$E_{10} = 370.371.188.237.525$
$B_{11} = 854.513/138$	$E_{11} = 69.348.874.393.137.901$
$B_{12} = 236.364.091/2730$	$E_{12} = 15.514.534.163.557.086.905$

Relação dos números de Bernoulli e de Euler

23.5 $\binom{2n+1}{2}2^2B_1 - \binom{2n+1}{4}2^4B_2 + \binom{2n+1}{6}2^6B_3 - \cdots(-1)^{n-1}(2n+1)2^{2n}B_n = 2n$

23.6 $E_n = \binom{2n}{2}E_{n-1} - \binom{2n}{4}E_{n-2} + \binom{2n}{6}E_{n-3} - \cdots(-1)^n$

23.7 $B_n = \dfrac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\binom{2n-1}{1}E_{n-1} - \binom{2n-1}{3}E_{n-2} + \binom{2n-1}{5}E_{n-3} - \cdots(-1)^{n-1}\right\}$

Séries envolvendo os números de Bernoulli e de Euler

23.8 $B_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left\{1 + \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} + \cdots\right\}$

23.9 $B_n = \dfrac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left\{1 + \dfrac{1}{3^{2n}} + \dfrac{1}{5^{2n}} + \cdots\right\}$

23.10 $B_n = \dfrac{2(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\left\{1 - \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} - \cdots\right\}$

23.11 $E_n = \dfrac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left\{1 - \dfrac{1}{3^{2n+1}} + \dfrac{1}{5^{2n+1}} - \cdots\right\}$

Fórmula assintótica para os números de Bernoulli

23.12 $B_n \sim 4n^{2n}(\pi e)^{-2n}\sqrt{\pi n}$

24 Séries de Fourier

Definição de uma série de Fourier

A série de Fourier correspondente a uma função $f(x)$ definida no intervalo $c \leqq x \leqq c + 2L$, onde c e $L > 0$ são constantes, é definida por

24.1 $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

24.2 $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Se $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas por partes e $f(x)$ é definida por extensão periódica de período $2L$, ou seja, $f(x + 2L) = f(x)$, então a série converge para $f(x)$, se x é um ponto de continuidade e para $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$, se x é um ponto de descontinuidade.

Forma complexa da série de Fourier

Supondo que a série 24.1 converge para $f(x)$, temos

24.3 $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

onde

24.4 $$c_n = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

Identidade de Parseval

24.5 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Identidade de Parseval generalizada

24.6 $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

onde a_n, b_n e c_n, d_n são os coeficientes de Fourier correspondentes a $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente.

Séries de Fourier especiais e seus gráficos

24.7 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right)$$

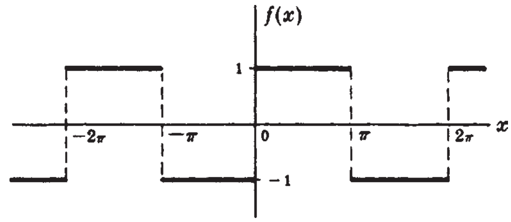


Fig. 24-1

24.8 $f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

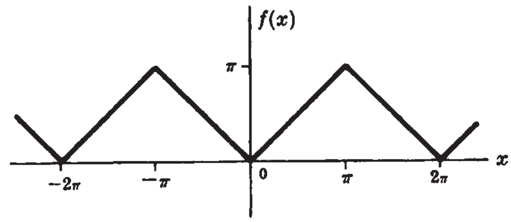


Fig. 24-2

24.9 $f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi$

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right)$$

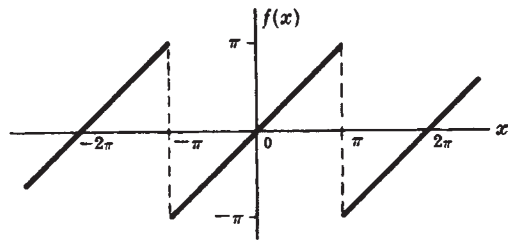


Fig. 24-3

24.10 $f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$

$$\pi - 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots\right)$$

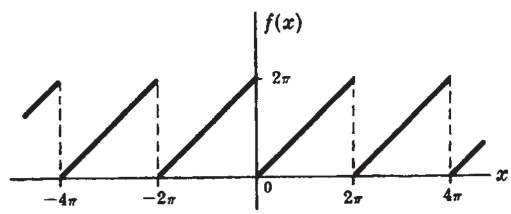


Fig. 24-4

24.11 $f(x) = |\operatorname{sen} x\,|, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$$

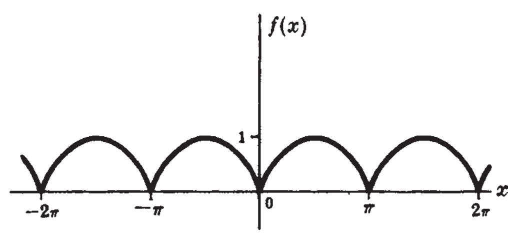


Fig. 24-5

24.12 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & 0<x<\pi \\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$

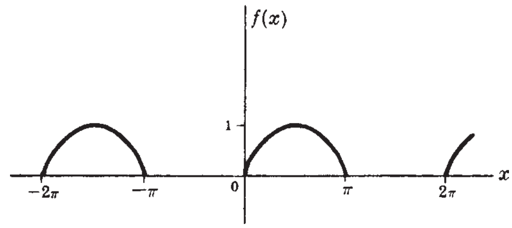


Fig. 24-6

24.13 $f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi \\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\operatorname{sen} 4x}{3\cdot 5}+\frac{3\operatorname{sen} 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$

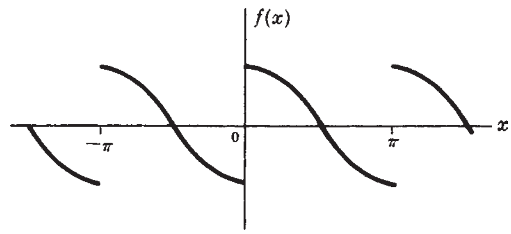


Fig. 24-7

24.14 $f(x)=x^2,\quad -\pi<x<\pi$

$$\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$$

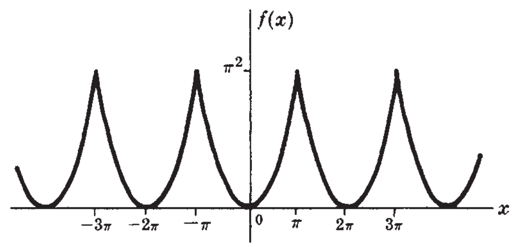


Fig. 24-8

24.15 $f(x)=x(\pi-x),\quad 0<x<\pi$

$$\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$$

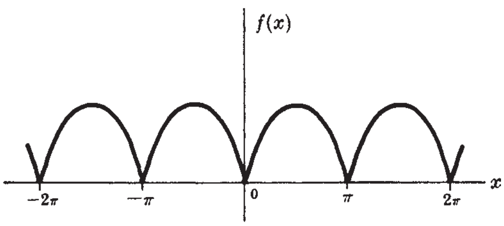


Fig. 24-9

24.16 $f(x)=x(\pi-x)(\pi+x),\quad -\pi<x<\pi$

$$12\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2^3}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3}-\cdots\right)$$

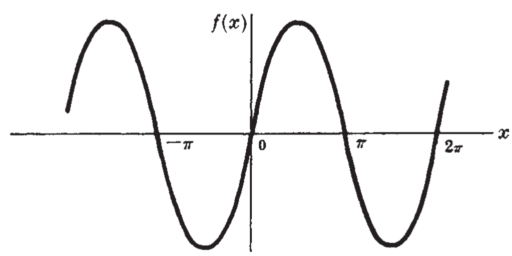


Fig. 24-10

24.17 $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - \alpha \\ 1 & \pi - \alpha < x < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < x < 2\pi \end{cases}$

$$\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos x}{1} - \frac{\operatorname{sen}2\alpha\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha\cos 3x}{3} - \cdots\right)$$

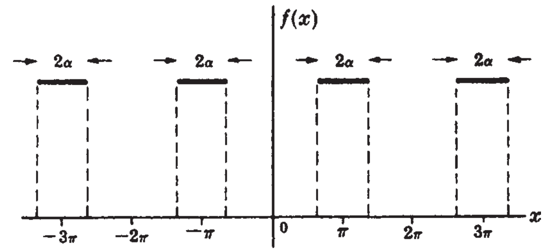


Fig. 24-11

24.18 $f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ -x(\pi - x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen}3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}5x}{5^3} + \cdots\right)$$

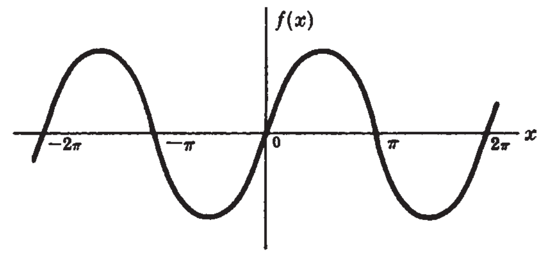


Fig. 24-12

Séries de Fourier diversas

24.19 $f(x) = \operatorname{sen}\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ inteiro

$$\frac{2\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots\right)$$

24.20 $f(x) = \cos\mu x, \quad -\pi < x < \pi, \quad \mu \neq$ inteiro

$$\frac{2\mu\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots\right)$$

24.21 $f(x) = \operatorname{arc\,tg}[(a\operatorname{sen}x)/(1 - a\cos x)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\operatorname{sen}x + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x + \cdots$$

24.22 $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2), \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$-2\left(a\cos x + \frac{a^2}{2}\cos 2x + \frac{a^3}{3}\cos 3x + \cdots\right)$$

24.23 $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}[(2a\operatorname{sen}x)/(1 - a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\operatorname{sen}x + \frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x + \frac{a^5}{5}\operatorname{sen}5x + \cdots$$

24.24 $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}[(2a\cos x)/(1 - a^2)], \quad -\pi < x < \pi, \quad |a| < 1$

$$a\cos x - \frac{a^3}{3}\cos 3x + \frac{a^5}{5}\cos 5x - \cdots$$

24.25 $f(x) = e^{\mu x}, \ -\pi < x < \pi$	$$\frac{2\,\mathrm{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu\cos nx - n\,\mathrm{sen}\,nx)}{\mu^2+n^2}\right)$$
24.26 $f(x) = \mathrm{senh}\,\mu x, \quad -\pi < x < \pi$	$$\frac{2\,\mathrm{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1^2+\mu^2} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,2x}{2^2+\mu^2} + \frac{3\,\mathrm{sen}\,3x}{3^2+\mu^2} - \cdots\right)$$
24.27 $f(x) = \cosh\mu x, \quad -\pi < x < \pi$	$$\frac{2\mu\,\mathrm{senh}\,\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{1^2+\mu^2} + \frac{\cos 2x}{2^2+\mu^2} - \frac{\cos 3x}{3^2+\mu^2} + \cdots\right)$$
24.28 $f(x) = \ln\lvert\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}x\rvert, \quad 0 < x < \pi$	$$-\left(\ln 2 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$
24.29 $f(x) = \ln\lvert\cos\tfrac{1}{2}x\rvert, \quad -\pi < x < \pi$	$$-\left(\ln 2 - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + \cdots\right)$$
24.30 $f(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{2}\pi x + \tfrac{1}{4}x^2, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots$$
24.31 $f(x) = \tfrac{1}{12}x(x-\pi)(x-2\pi), \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$$\frac{\mathrm{sen}\,x}{1^3} + \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2^3} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3^3} + \cdots$$
24.32 $f(x) = \tfrac{1}{90}\pi^4 - \tfrac{1}{12}\pi^2x^2 + \tfrac{1}{12}\pi x^3 - \tfrac{1}{48}x^4, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi$	$$\frac{\cos x}{1^4} + \frac{\cos 2x}{2^4} + \frac{\cos 3x}{3^4} + \cdots$$

A Função Gama 25

Definição da função gama $\Gamma(n)$ para $n > 0$

25.1 $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \qquad n > 0$

Fórmula de recorrência

25.2 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Se $n = 0, 1, 2, \ldots$, um número inteiro não negativo, temos o seguinte (onde $0! = 1$):

25.3 $\Gamma(n+1) = n!$

Função gama para $n < 0$

Para $n < 0$, a função gama pode ser definida usando a Fórmula 25.2, ou seja,

25.4 $\Gamma(n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$

Gráfico da função gama

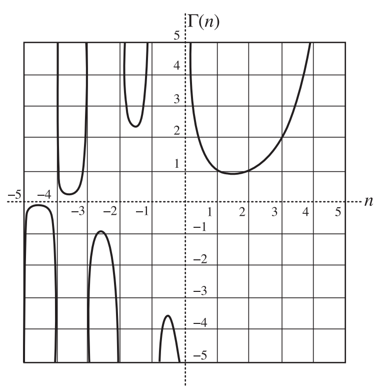


Fig. 25-1

Valores especiais da função gama

25.5 $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

25.6 $\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$

25.7 $\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \dfrac{(-1)^m 2^m \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$

Relações entre funções gama

25.8 $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

25.9 $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$

Esta é a chamada de *fórmula de duplicação*.

25.10 $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\dfrac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\dfrac{m-1}{m}\right) = m^{1/2-mx}(2\pi)^{(m-1)/2}\Gamma(mx)$

Para $m = 2$, isto reduz-se a 25.9.

Outras definições da função gama

25.11 $\Gamma(x+1) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} k^x$

25.12 $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\dfrac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\}$

Esta é uma representação da função gama em produto infinito, onde γ é a constante de Euler, definida em 1.3.

Derivadas da função gama

25.13 $\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$

25.14 $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{x}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n-1}\right) + \cdots$

Aqui, novamente, está a constante de Euler γ.

Expansões assintóticas para a função gama

25.15 $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51.840x^3} + \cdots \right\}$

Esta é chamada *série assintótica de Stirling*.

Tomando $x = n$ um número inteiro positivo em 25.15, então uma aproximação útil para $n!$ quando n é grande (por exemplo, $n > 10$), é dada pela *fórmula de Stirling*

25.16 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

onde ~ é usado para indicar que a razão dos dois termos tende a 1 quando $n \to \infty$.

Mais uma relação

25.17 $|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \operatorname{senh} \pi x}$

26 A Função Beta

Definição da função beta $B(m, n)$

26.1 $B(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt \qquad m>0,\ n>0$

Relação entre a função beta e a função gama

26.2 $B(m,\ n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Extensões de $B(m, n)$, para $m < 0$ e $n < 0$, são obtidas usando-se 25.4.

Alguns resultados importantes

26.3 $B(m,\ n) = B(n,\ m)$

26.4 $B(m,\ n)=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$

26.5 $B(m,\ n)=\int_0^{\infty}\dfrac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}\,dt$

26.6 $B(m,\ n)=r^n(r+1)^m\int_0^1\dfrac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}}\,dt$

Funções de Bessel 27

Equação diferencial de Bessel

27.1 $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geqq 0$

As soluções desta equação são denominadas *funções de Bessel de ordem n*.

Funções de Bessel de 1ª espécie de ordem *n*

27.2 $$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

27.3 $$J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

27.4 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Se $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ são linearmente independentes.
Se $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, $J_n(x)$ é limitada em $x = 0$, enquanto que $J_{-n}(x)$ é ilimitada.
Para $n = 0, 1$, temos

27.5 $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$

27.6 $$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \frac{x^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots$$

27.7 $J_0'(x) = -J_1(x)$

Funções de Bessel de 2ª espécie de ordem n

27.8 $$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \lim\limits_{p\to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Esta também é chamada de *função de Weber* ou *função de Neumann* [também denotada por $N_n(x)$].

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, a regra de L'Hôpital nos dá

27.9 $$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2)+\gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(x/2)^{2k-n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

onde $\gamma = 0{,}5772156\ldots$ é a constante de Euler [ver 1.3] e

27.10 $$\Phi(p) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{P}, \qquad \Phi(0) = 0$$

Para $n = 0$,

27.11 $$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2)+\gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \cdots\right\}$$

27.12 $$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para qualquer valor $n \geqq 0$, $J_n(x)$ é limitada em $x = 0$, enquanto que $Y_n(x)$ é ilimitada.

Solução geral da equação diferencial de Bessel

27.13 $$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

27.14 $$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \qquad \text{todos os } n$$

27.15 $$y = AJ_n(x) + BJ_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)} \qquad \text{todos os } n$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Função geradora para $J_n(x)$

27.16 $$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Fórmulas de recorrência para funções de Bessel

27.17 $$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

27.18 $$J_n'(x) = \tfrac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}$$

27.19 $xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$

27.20 $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$

27.21 $\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$

27.22 $\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

As funções $Y_n(x)$ satisfazem relações idênticas.

Funções de Bessel de ordem igual à metade de um número inteiro ímpar

Nesse caso, as funções são expressas em termos de senos e cossenos.

27.23 $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \operatorname{sen} x$

27.24 $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x$

27.25 $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right)$

27.26 $J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x\right)$

27.27 $J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\operatorname{sen} x - \frac{3}{x}\cos x\right\}$

27.28 $J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{3}{x}\operatorname{sen} x + \left(\frac{3}{x} - 1\right)\cos x\right\}$

Para mais resultados, use a fórmula de recorrência 27.17. Resultados para $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, … são obtidos a partir de 27.8.

Funções de Hankel de 1ª e 2ª espécies de ordem *n*

27.29 $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$

27.30 $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$

Equação diferencial de Bessel modificada

27.31 $x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geqq 0$

As soluções desta equação são chamadas *funções de Bessel modificadas de ordem n*.

Funções de Bessel modificadas de 1ª espécie de ordem *n*

27.32 $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix)$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

27.33 $I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2} J_{-n}(ix)$

$$= \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

27.34 $I_{-n}(x) = I_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Se $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, então $I_n(x)$ e $I_{-n}(x)$ são linearmente independentes.

Para $n = 0, 1$, temos

27.35 $I_0(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$

27.36 $I_1(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \dfrac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dfrac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots$

27.37 $I_0'(x) = I_1(x)$

Funções de Bessel modificadas de 2ª espécie de ordem *n*

27.38 $K_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} n\pi} \{I_{-n}(x) - I_n(x)\} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} p\pi} \{I_{-p}(x) - I_p(x)\} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, a regra de L'Hôpital nos dá

27.39 $K_n(x) = (-1)^{n+1}\{\ln(x/2) + \gamma\} I_n(x) + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)!(x/2)^{2k-n}$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{\Phi(k) + \Phi(n+k)\}$$

onde $\Phi(p)$ é dada por 27.10.

Para $n = 0$,

27.40 $K_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\} I_0(x) + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \cdots$

27.41 $K_{-n}(x) = K_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Solução geral da equação de Bessel modificada

27.42 $y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$

27.43 $y = AI_n(x) + BK_n(x) \qquad$ todos os n

27.44 $y = AI_n(x) + BI_n(x) \displaystyle\int \frac{dx}{xI_n^2(x)} \qquad$ todos os n

onde A e B são constantes arbitrárias.

Função geradora para $I_n(x)$

27.45 $e^{x(t+1/t)/2} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$

Fórmulas de recorrência para as funções de Bessel modificadas

27.46 $I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \dfrac{2n}{x} I_n(x)$

27.47 $I'_n(x) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\}$

27.48 $xI'_n(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)$

27.49 $xI'_n(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)$

27.50 $\dfrac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)$

27.51 $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x)$

27.52 $K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \dfrac{2n}{x} K_n(x)$

27.53 $K'_n(x) = -\frac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\}$

27.54 $xK'_n(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x)$

27.55 $xK'_n(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)$

27.56 $\dfrac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x)$

27.57 $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x)$

Funções de Bessel modificadas de ordem igual à metade de um número inteiro ímpar

Neste caso, as funções são expressas em termos de senos e cossenos hiperbólicos.

27.58 $I_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\operatorname{senh} x$

27.59 $I_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\cosh x$

27.60 $I_{3/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\cosh x - \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}\right)$

27.61 $I_{-3/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\operatorname{senh} x - \dfrac{\cosh x}{x}\right)$

27.62 $I_{5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{\left(\dfrac{3}{x^2}+1\right)\operatorname{senh} x - \dfrac{3}{x}\cosh x\right\}$

27.63 $I_{-5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{\left(\dfrac{3}{x^2}+1\right)\cosh x - \dfrac{3}{x}\operatorname{senh} x\right\}$

Para mais resultados, use a fórmula de recorrência 27.46. Resultados para $K_{1/2}(x)$, $K_{3/2}(x)$, … são obtidos a partir de 27.38.

Funções Ber e Bei

As partes real e imaginária de $J_n(xe^{3\pi i/4})$ são denotadas por $\mathrm{Ber}_n(x)$ e $\mathrm{Bei}_n(x)$, onde

27.64 $\mathrm{Ber}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$

27.65 $\mathrm{Bei}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}$

Se $n = 0$,

27.66 $\mathrm{Ber}(x) = 1 - \dfrac{(x/2)^4}{2!^2} + \dfrac{(x/2)^8}{4!^2} - \cdots$

27.67 $\mathrm{Bei}(x) = (x/2)^2 - \dfrac{(x/2)^6}{3!^2} + \dfrac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \cdots$

Funções Ker e Kei

As partes real e imaginária de $e^{-n\pi i/2}K_n(xe^{\pi i/4})$ são denotadas por $\text{Ker}_n(x)$ e $\text{Kei}_n(x)$, onde

27.68 $\text{Ker}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\text{Ber}_n(x) + \frac{1}{4}\pi\,\text{Bei}_n(x)$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

27.69 $\text{Kei}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\text{Bei}_n(x) - \frac{1}{4}\pi\,\text{Ber}_n(x)$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\sin\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\,\text{sen}\,\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

e Φ é dada por 27.10.

Se $n = 0$,

27.70 $\text{Ker}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\text{Ber}(x) + \frac{\pi}{4}\text{Bei}(x) + 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{(x/2)^8}{4!^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) - \cdots$

27.71 $\text{Kei}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\text{Bei}(x) - \frac{\pi}{4}\text{Ber}(x) + (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + \cdots$

Equação diferencial para as funções Ber, Bei, Ker e Kei

27.72 $x^2y'' + xy' - (ix^2+n^2)y = 0$

A solução geral dessa equação é

27.73 $y = A\{Ber_n(x) + i\,\text{Bei}_n(x)\} + B\{\text{Ker}_n(x) + i\,\text{Kei}_n(x)\}$

Gráficos das funções de Bessel

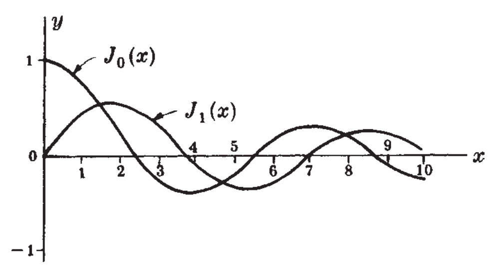


Fig. 27-1

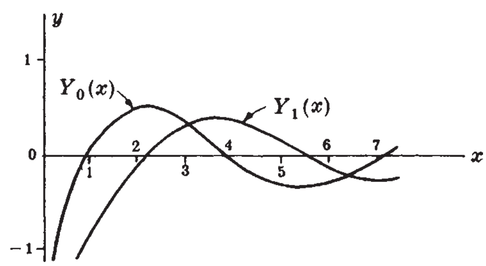


Fig. 27-2

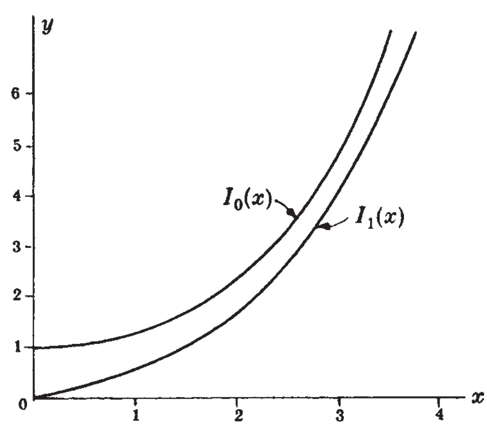


Fig. 27-3

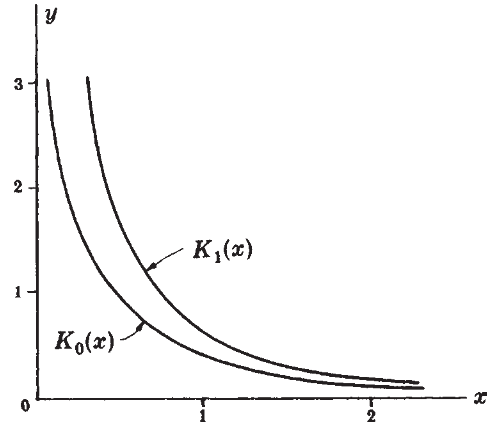


Fig. 27-4

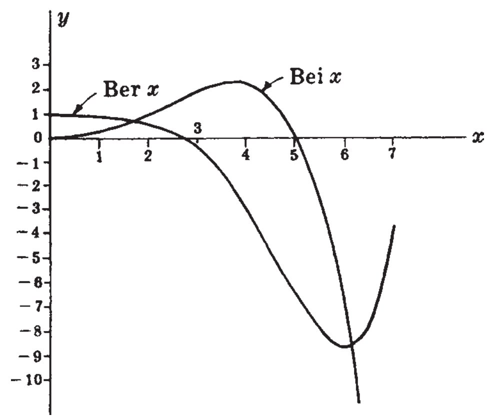


Fig. 27-5

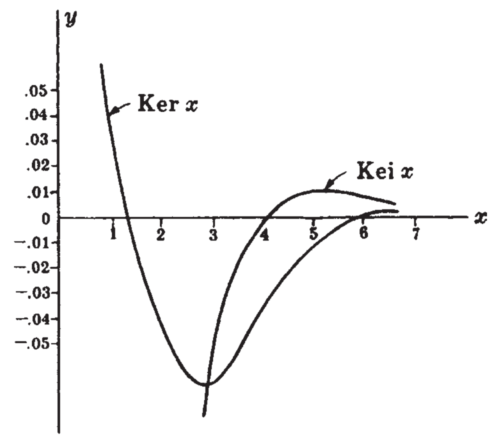


Fig. 27-6

Integrais indefinidas envolvendo funções de Bessel

27.74 $\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$

27.75 $\int x^2J_0(x)dx = x^2J_1(x) + xJ_0(x) - \int J_0(x)dx$

27.76 $\int x^mJ_0(x)dx = x^mJ_1(x) + (m-1)x^{m-1}J_0(x) - (m-1)^2 \int x^{m-2}J_0(x)dx$

27.77 $\int \frac{J_0(x)}{x^2}dx = J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x} - \int J_0(x)dx$

27.78 $\int \frac{J_0(x)}{x^m}dx = \frac{J_1(x)}{(m-1)^2x^{m-2}} - \frac{J_0(x)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2} \int \frac{J_0(x)}{x^{m-2}}dx$

27.79 $\int J_1(x)dx = -J_0(x)$

27.80 $\int xJ_1(x)dx = -xJ_0(x) + \int J_0(x)dx$

27.81 $\int x^mJ_1(x)dx = -x^mJ_0(x) + m \int x^{m-1}J_0(x)dx$

27.82 $\displaystyle\int \frac{J_1(x)}{x}dx = -J_1(x) + \int J_0(x)dx$

27.83 $\displaystyle\int \frac{J_1(x)}{x^m}dx = -\frac{J_1(x)}{mx^{m-1}} + \frac{1}{m}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-1}}dx$

27.84 $\displaystyle\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x)$

27.85 $\displaystyle\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x)$

27.86 $\displaystyle\int x^m J_n(x)dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)dx$

27.87 $\displaystyle\int xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{x\{\alpha J_n(\beta x)J_n'(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J_n'(\beta x)\}}{\beta^2 - \alpha^2}$

27.88 $\displaystyle\int xJ_n^2(\alpha x)dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$

Os resultados acima também são válidos se substituirmos $J_n(x)$ por $Y_n(x)$ ou, mais geralmente, por $AJ_n(x) + BY_n(x)$, onde A e B são constantes.

Integrais definidas envolvendo funções de Bessel

27.89 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

27.90 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_n(bx)dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^n}{b^n\sqrt{a^2+b^2}} \qquad n > -1$

27.91 $\displaystyle\int_0^\infty \cos ax\, J_0(bx)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} & a > b \\ 0 & a < b \end{cases}$

27.92 $\displaystyle\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b}, \qquad n > -1$

27.93 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{J_n(bx)}{x}dx = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

27.94 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_0(b\sqrt{x})dx = \frac{e^{-b^2/4a}}{a}$

27.95 $\displaystyle\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx = \frac{\alpha J_n(\beta)J_n'(\alpha) - \beta J_n(\alpha)J_n'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$

27.96 $\displaystyle\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)dx = \tfrac{1}{2}\{J_n'(\alpha)\}^2 + \tfrac{1}{2}(1 - n^2/\alpha^2)\{J_n(\alpha)\}^2$

27.97 $\displaystyle\int_0^1 xJ_0(\alpha x)I_0(\beta x)dx = \frac{\beta J_0(\alpha)I_0'(\beta) - \alpha J_0'(\alpha)I_0(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$

Representações integrais de funções de Bessel

27.98 $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

27.99 $J_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ $\quad n =$ inteiro

27.100 $J_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n \sqrt{\pi}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta) \cos^{2n}\theta\,d\theta$ $\quad n > -\frac{1}{2}$

27.101 $Y_0(x) = -\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x \cosh u)\,du$

27.102 $I_0(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cosh(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{x \operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

Expansões assintóticas

27.103 $J_n(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ onde x é grande

27.104 $Y_n(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ onde x é grande

27.105 $J_n(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\dfrac{ex}{2n}\right)^n$ $\quad$ onde n é grande

27.106 $Y_n(x) \sim -\sqrt{\dfrac{2}{\pi n}} \left(\dfrac{ex}{2n}\right)^{-n}$ $\quad$ onde n é grande

27.107 $I_n(x) \sim \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ $\quad$ onde x é grande

27.108 $K_n(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$ $\quad$ onde x é grande

Séries ortogonais de funções de Bessel

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ as raízes positivas de $RJ_n(x) + SxJ_n'(x) = 0,\ n > -1$. Então, as seguintes expansões em séries são obtidas sob as condições indicadas.

$S = 0,\ R \neq 0$, ou seja, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são raízes positivas de $J_N(x) = 0$

27.109 $f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$

onde

27.110 $A_k = \dfrac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\,dx$

Em particular, se $n = 0$,

27.111 $f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$

onde

27.112 $A_k = \dfrac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\,dx$

$R/S > -n$
27.113 $f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$ onde **27.114** $A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x) dx$ Em particular, se $n = 0$, **27.115** $f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$ onde **27.116** $A_k = \dfrac{2}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x) dx$

As fórmulas seguintes referem-se à expansão das funções de Bessel, onde $S \neq 0$.

$R/S = -n$
27.117 $f(x) = A_0 x^n + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots$ onde **27.118** $\begin{cases} A_0 = 2(n+1) \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} f(x) dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x) dx \end{cases}$ Em particular, se $n = 0$, de modo que $R = 0$ [ou seja, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são as raízes positivas de $J_1(x) = 0$], **27.119** $f(x) = A_0 + A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + \cdots$ onde **27.120** $\begin{cases} A_0 = 2 \displaystyle\int_0^1 x f(x) dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_0^2(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x) dx \end{cases}$
$R/S < -N$
Neste caso, há duas raízes imaginárias puras $\pm i\lambda_0$, bem como as raízes positivas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ e temos **27.121** $f(x) = A_0 I_n(\lambda_0 x) + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots$ onde **27.122** $\begin{cases} A_0 = \dfrac{2}{I_n^2(\lambda_0) + I_{n-1}(\lambda_0) I_{n+1}(\lambda_0)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) I_n(\lambda_0 x) dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \displaystyle\int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x) dx \end{cases}$

Resultados diversos

27.123 $\cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots$

27.124 $\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2J_1(x)\,\mathrm{sen}\,\theta + 2J_3(x)\,\mathrm{sen}\,3\theta + 2J_5(x)\,\mathrm{sen}\,5\theta + \cdots$

27.125 $J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Esta é chamada a *fórmula de adição* para as funções de Bessel.

27.126 $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + \cdots + 2J_{2n}(x) + \cdots$

27.127 $x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots + (2n+1)J_{2n+1}(x) + \cdots\}$

27.128 $x^2 = 2\{4J_2(x) + 16J_4(x) + 36J_6(x) + \cdots + (2n)^2 J_{2n}(x) + \cdots\}$

27.129 $\dfrac{xJ_1(x)}{4} = J_2(x) - 2J_4(x) + 3J_6(x) - \cdots$

27.130 $1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + 2J_3^2(x) + \cdots$

27.131 $J_n''(x) = \frac{1}{4}\{J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\}$

27.132 $J_n'''(x) = \frac{1}{8}\{J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)\}$

As Fórmulas 27.131 e 27.132 podem ser generalizadas.

27.133 $J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'J_n(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,n\pi}{\pi x}$

27.134 $J_n(x)J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x)J_{n-1}(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,n\pi}{\pi x}$

27.135 $J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = J_n(x)Y_n'(x) - J_n'(x)Y_n(x) = \dfrac{2}{\pi x}$

27.136 $\mathrm{sen}\,x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots\}$

27.137 $\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$

27.138 $\mathrm{senh}\,x = 2\{I_1(x) + I_3(x) + I_5(x) + \cdots\}$

27.139 $\cosh x = I_0(x) + 2\{I_2(x) + I_4(x) + I_6(x) + \cdots\}$

28 Funções de Legendre e de Legendre Associadas

Equação diferencial de Legendre

28.1 $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

As soluções desta equação são denominadas *funções de Legendre de ordem n.*

Polinômios de Legendre

Se $n = 0, 1, 2, \ldots$, uma solução de 28.1 é o polinômio de Legendre $P_n(x)$ dado pela *fórmula de Rodrigues*

28.2 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Polinômios de Legendre especiais

28.3 $P_0(x) = 1$

28.4 $P_1(x) = x$

28.5 $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

28.6 $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

28.7 $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

28.8 $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

28.9 $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

28.10 $P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$

Polinômios de Legendre em termos de θ, onde $x = \cos\theta$

28.11 $P_0(\cos\theta) = 1$

28.12 $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

28.13 $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)$

28.14 $P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos 3\theta)$

28.15 $P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(9+20\cos 2\theta+35\cos 4\theta)$

28.16 $P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(30\cos\theta+35\cos 3\theta+63\cos 5\theta)$

28.17 $P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(50+105\cos 2\theta+126\cos 4\theta+231\cos 6\theta)$

28.18 $P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(175\cos\theta+189\cos 3\theta+231\cos 5\theta+429\cos 7\theta)$

Função geradora para os polinômios de Legendre

28.19 $$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Fórmulas de recorrência para os polinômios de Legendre

28.20 $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$

28.21 $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$

28.22 $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$

28.23 $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

28.24 $(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Ortogonalidade dos polinômios de Legendre

28.25 $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad m \neq n$

28.26 $\int_{-1}^{1} \{P_n(x)\}^2 dx = \dfrac{2}{2n+1}$

Devido a 28.25, $P_m(x)$ e $P_n(x)$ são chamados *ortogonais* em $-1 \leqq x \leqq 1$.

Séries ortogonais dos polinômios de Legendre

28.27 $f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \cdots$

onde

28.28 $A_k = \dfrac{2k+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx$

Resultados especiais envolvendo polinômios de Legendre

28.29 $P_n(1) = 1$

28.30 $P_n(-1) = (-1)^n$

28.31 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

28.32 $$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ ímpar} \\ (-1)^{n/2}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} & n \text{ par} \end{cases}$$

28.33 $$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\phi\right)^n d\phi$$

28.34 $$\int P_n(x)dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

28.35 $|P_n(x)| \leqq 1$

28.36 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^{n+1}\pi i}\displaystyle\oint_c \dfrac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$

onde C é uma curva fechada simples, tendo x como um ponto interior.

Solução geral da equação de Legendre

A solução geral da equação de Legendre é

28.37 $y = AU_n(x) + BV_n(x)$

onde

28.38 $U_n(x) = 1 - \dfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots$

28.39 $V_n(x) = x - \dfrac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \dfrac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots$

Estas séries convergem em $-1 < x < 1$.

Funções de Legendre de 2ª espécie

Se $n = 0, 1, 2, ...$, uma das séries 28.38 ou 28.39 é finita. Em tais casos,

28.40 $P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ V_n(x)/V_n(1) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

onde

28.41 $U_n(1) = (-1)^{n/2}2^n\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\right]^2 \Big/ n! \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$

28.42 $V_n(1) = (-1)^{(n-1)/2}2^{n-1}\left[\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\right]^2 \Big/ n! \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$

Neste caso, a série infinita, com uma constante multiplicativa conveniente, é denotada por $Q_n(x)$ e é denominada *função de Legendre de 2ª espécie de ordem n*. Definimos

28.43 $Q_n(x) = \begin{cases} U_n(1)V_n(x) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ -V_n(1)U_n(x) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

Funções de Legendre de 2ª espécie especiais

28.44 $Q_0(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

28.45 $Q_1(x) = \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 1$

28.46 $Q_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{3x}{2}$

28.47 $Q_3(x) = \dfrac{5x^3 - 3x}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{2}{3}$

As funções $Q_n(x)$ satisfazem fórmulas de recorrência exatamente análogas a 28.20 até 28.24. Usando estas, a solução geral da equação de Legendre também pode ser escrita como

28.48 $y = AP_n(x) + BQ_n(x)$

Equação diferencial de Legendre associada

28.49 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left\{n(n+1) - \dfrac{m^2}{1 - x^2}\right\}y = 0$

As soluções desta equação são chamadas *funções de Legendre associadas*. Restringimo-nos ao caso importante onde m e n são inteiros não negativos.

Funções de Legendre associadas de 1ª espécie

28.50 $P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \dfrac{(1 - x^2)^{m/2}}{2^n n!}\dfrac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2 - 1)^n$

onde $P_n(x)$ são polinômios de Legendre (ver 28.2). Temos

28.51 $P_n^0(x) = P_n(x)$

28.52 $P_n^m(x) = 0 \qquad \text{se } m > n$

Funções de Legendre associadas de 1ª espécie especiais

28.53 $P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2}$

28.54 $P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2}$

28.55 $P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$

28.56 $P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2}$

28.57 $P_3^2(x) = 15x(1 - x^2)$

28.58 $P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2}$

Função geradora para $P_n^m(x)$

28.59 $\dfrac{(2m)!(1 - x^2)^{m/2}t^m}{2^m m!(1 - 2tx + t^2)^{m+1/2}} = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^n$

Fórmulas de recorrência

28.60 $(n + 1 - m)P_{n+1}^m(x) - (2n + 1)xP_n^m(x) + (n + m)P_{n-1}^m(x) = 0$

28.61 $P_n^{m+2}(x) - \dfrac{2(m+1)x}{(1 - x^2)^{1/2}}P_n^{m+1}(x) + (n - m)(n + m + 1)P_n^m(x) = 0$

Ortogonalidade de $P_n^m(x)$

28.62 $\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_n^m(x)dx = 0 \qquad \text{se } n \neq l$

28.63 $\int_{-1}^{1} \{P_n^m(x)\}^2 dx = \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}$

Séries ortogonais

28.64 $f(x) = A_m P_m^m(x) + A_{m+1}P_{m+1}^m(x) + A_{m+2}P_{m+2}^m(x) + \cdots$

onde

28.65 $A_k = \dfrac{2k+1}{2}\dfrac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^m(x)dx$

Funções de Legendre associadas de 2ª espécie

28.66 $Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$

onde $Q_n(x)$ são funções de Legendre de 2ª classe (ver 28.43).

Estas funções são ilimitadas em $x = \pm 1$, enquanto $P_n^m(x)$ são limitadas em $x = \pm 1$.

As funções $Q_n^m(x)$ satisfazem as mesmas relações de recorrência que $P_n^m(x)$ (ver 28.60 e 28.61).

Solução geral da equação de Legendre associada

28.67 $y = AP_n^m(x) + BQ_n^m(x)$

Polinômios de Hermite 29

Equação diferencial de Hermite

29.1 $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

Polinômios de Hermite

Se $n = 0, 1, 2, \ldots$, então uma solução da equação de Hermite é o polinômio de Hermite $H_n(x)$ dado pela *fórmula de Rodrigues*

29.2 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Polinômios de Hermite especiais

29.3 $H_0(x) = 1$

29.4 $H_1(x) = 2x$

29.5 $H_2(x) = 4x^2 - 2$

29.6 $H_3(x) = 8x^3 - 12x$

29.7 $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

29.8 $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

29.9 $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

29.10 $H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

Função geradora

29.11 $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{H_n(x)t^n}{n!}$

Fórmulas de recorrência

29.12 $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

29.13 $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$

Ortogonalidade dos polinômios de Hermite

29.14 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n$

29.15 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{H_n(x)\}^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$

Séries ortogonais

29.16 $f(x) = A_0 H_0(x) + A_1 H_1(x) + A_2 H_2(x) + \cdots$

onde

29.17 $A_k = \dfrac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$

Resultados especiais

29.18 $H_n(x) = (2x)^n - \dfrac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$

29.19 $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

29.20 $H_{2n-1}(0) = 0$

29.21 $H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (2n-1)$

29.22 $\displaystyle\int_0^x H_n(t)dt = \dfrac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \dfrac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}$

29.23 $\dfrac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\} = -e^{-x^2} H_{n+1}(x)$

29.24 $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$

29.25 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt)dt = \sqrt{\pi} n! P_n(x)$

29.26 $H_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^{n/2}} \binom{n}{k} H_k(x\sqrt{2}) H_{n-k}(y\sqrt{2})$

Esta é chamada a *fórmula de adição* para polinômios de Hermite.

29.27 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!} = \dfrac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n!(x-y)}$

Polinômios de Laguerre e de Laguerre Associados

30

Equação diferencial de Laguerre

30.1 $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$

Polinômios de Laguerre

Se $n = 0, 1, 2, ...$, uma solução de 30.1 é o polinômio de Laguerre $L_n(x)$ dado pela *fórmula de Rodrigues*

30.2 $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

Polinômios de Laguerre especiais

30.3 $L_0(x) = 1$

30.4 $L_1(x) = -x + 1$

30.5 $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$

30.6 $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$

30.7 $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$

30.8 $L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$

30.9 $L_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720$

30.10 $L_7(x) = -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29.400x^3 + 52.920x^2 - 35.280x + 5040$

Função geradora

30.11 $\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{L_n(x)t^n}{n!}$

Fórmulas de recorrência

30.12 $L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$

30.13 $L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

30.14 $xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

Ortogonalidade dos polinômios de Laguerre

30.15 $\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n$

30.16 $\int_0^\infty e^{-x} \{L_n(x)\}^2\,dx = (n!)^2$

Séries ortogonais

30.17 $f(x) = A_0 L_0(x) + A_1 L_1(x) + A_2 L_2(x) + \cdots$

onde

30.18 $A_k = \dfrac{1}{(k!)^2} \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_k(x)\,dx$

Resultados especiais

30.19 $L_n(0) = n!$

30.20 $\int_0^x L_n(t)\,dt = L_n(x) - \dfrac{L_{n+1}(x)}{n+1}$

30.21 $L_n(x) = (-1)^n \left\{ x^n - \dfrac{n^2 x^{n-1}}{1!} + \dfrac{n^2(n-1)^2 x^{n-2}}{2!} - \cdots (-1)^n n! \right\}$

30.22 $\int_0^\infty x^p e^{-x} L_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } p < n \\ (-1)^n (n!)^2 & \text{se } p = n \end{cases}$

30.23 $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{L_k(x) L_k(y)}{(k!)^2} = \dfrac{L_n(x) L_{n+1}(y) - L_{n+1}(x) L_n(y)}{(n!)^2 (x-y)}$

30.24 $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k L_k(x)}{(k!)^2} = e^t J_0(2\sqrt{xt})$

30.25 $L_n(x) = \int_0^\infty u^n e^{x-u} J_0(2\sqrt{xu})\,du$

Equação diferencial de Laguerre associada

30.26 $xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$

Polinômios de Laguerre associados

As soluções de 30.26 para inteiros não negativos m e n são dadas pelos polinômios de Laguerre associados

30.27 $L_n^m(x) = \dfrac{d^m}{dx^m} L_n(x)$

onde $L_n(x)$ são polinômios de Laguerre (ver 30.2).

30.28 $L_n^0(x) = L_n(x)$

30.29 $L_n^m(x) = 0 \qquad \text{se } m > n$

Polinômios de Laguerre associados especiais

30.30 $L_1^1(x) = -1$

30.31 $L_2^1(x) = 2x - 4$

30.32 $L_2^2(x) = 2$

30.33 $L_3^1(x) = -3x^2 + 18x - 18$

30.34 $L_3^2(x) = -6x + 18$

30.35 $L_3^3(x) = -6$

30.36 $L_4^1(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x - 96$

30.37 $L_4^2(x) = 12x^2 - 96x + 144$

30.38 $L_4^3(x) = 24x - 96$

30.39 $L_4^4(x) = 24$

Função geradora para $L_n^m(x)$

30.40 $$\frac{(-1)^m t^m}{(1-t)^{m+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{n!} t^n$$

Fórmulas de recorrência

30.41 $$\frac{n-m+1}{n+1} L_{n+1}^m(x) + (x + m - 2n - 1) L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) = 0$$

30.42 $$\frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = L_n^{m+1}(x)$$

30.43 $$\frac{d}{dx}\{x^m e^{-x} L_n^m(x)\} = (m-n-1) x^{m-1} e^{-x} L_n^{m-1}(x)$$

30.44 $$x\frac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = (x-m) L_n^m(x) + (m-n-1) L_n^{m-1}(x)$$

Ortogonalidade

30.45 $$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x) L_p^m(x)\,dx = 0 \qquad p \neq n$$

30.46 $$\int_0^\infty x^m e^{-x} \{L_n^m(x)\}^2\,dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

Séries ortogonais

30.47 $$f(x) = A_m L_m^m(x) + A_{m+1} L_{m+1}^m(x) + A_{m+2} L_{m+2}^m(x) + \cdots$$

onde

30.48 $$A_k = \frac{(k-m)!}{(k!)^3} \int_0^\infty x^m e^{-x} L_k^m(x) f(x)\,dx$$

Resultados especiais

30.49 $L_n^m(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(n-m)!}\left\{x^{n-m} - \dfrac{n(n-m)}{1!}x^{n-m-1} + \dfrac{n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{2!}x^{n-m-2} + \cdots\right\}$

30.50 $\displaystyle\int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}\{L_n^m(x)\}^2\,dx = \frac{(2n-m+1)(n!)^3}{(n-m)!}$

Polinômios de Chebyshev 31

Equação diferencial de Chebyshev

31.1 $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie

A solução de 31.1 é dada por

31.2 $T_n(x) = \cos(n \text{ arc cos } x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$

Polinômios especiais de Chebyshev de 1ª espécie

31.3 $T_0(x) = 1$

31.4 $T_1(x) = x$

31.5 $T_2(x) = 2x^2 - 1$

31.6 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

31.7 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

31.8 $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

31.9 $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

31.10 $T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

Função geradora para $T_n(x)$

31.11 $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$

Valores especiais

31.12 $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

31.13 $T_n(1) = 1$

31.14 $T_n(-1) = (-1)^n$

31.15 $T_{2n}(0) = (-1)^n$

31.16 $T_{2n+1}(0) = 0$

Fórmula de recorrência para $T_n(x)$

31.17 $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$

Ortogonalidade

31.18 $\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \qquad m \neq n$

31.19 $\int_{-1}^{1} \frac{\{T_n(x)\}^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 0 \\ \pi/2 & \text{se } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Séries ortogonais

31.20 $f(x) = \frac{1}{2}A_0T_0(x) + A_1T_1(x) + A_2T_2(x) + \cdots$

onde

31.21 $A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

31.22 $U_n(x) = \frac{\text{sen}\{(n+1)\text{ arc cos } x\}}{\text{sen}(\text{arc cos } x)}$

$$= \binom{n+1}{1}x^n - \binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

Polinômios de Chebyshev associados de 2ª espécie especiais

31.23 $U_0(x) = 1$

31.24 $U_1(x) = 2x$

31.25 $U_2(x) = 4x^2 - 1$

31.26 $U_3(x) = 8x^3 - 4x$

31.27 $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

31.28 $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

31.29 $U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

31.30 $U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

Função geradora para $U_n(x)$

31.31 $\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$

Valores especiais

31.32 $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$

31.33 $U_n(1) = n+1$

31.34 $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$

31.35 $U_{2n}(0) = (-1)^n$

31.36 $U_{2n+1}(0) = 0$

Fórmula de recorrência para $U_n(x)$

31.37 $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

Ortogonalidade

31.38 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_m(x)U_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n$

31.39 $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \{U_n(x)\}^2 dx = \dfrac{\pi}{2}$

Séries ortogonais

31.40 $f(x) = A_0U_0(x) + A_1U_1(x) + A_2U_2(x) + \cdots$

onde

31.41 $A_k = \dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)U_k(x)dx$

Relações entre $T_n(x)$ e $U_n(x)$

31.42 $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$

31.43 $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

31.44 $U_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \dfrac{T_{n+1}(v)dv}{(v-x)\sqrt{1-v^2}}$

31.45 $T_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \dfrac{\sqrt{1-v^2}\, U_{n-1}(v)}{x-v} dv$

Solução geral da equação diferencial de Chebyshev

31.46 $y = \begin{cases} AT_n(x) + B\sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x) & \text{se } n = 1, 2, 3, \ldots \\ A + B \operatorname{arc\,sen} x & \text{se } n = 0 \end{cases}$

32 Funções Hipergeométricas

Equação diferencial hipergeométrica

32.1 $x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$

Funções hipergeométricas

Uma solução de 32.1 é dada por

32.2 $F(a,b;c;x) = 1 + \dfrac{a \bullet b}{1 \bullet c}x + \dfrac{a(a+1)b(b+1)}{1 \bullet 2 \bullet c(c+1)}x^2 + \dfrac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$

Se a, b e c são números reais, então a série converge em $-1 < x < 1$, desde que $c - (a + b) > -1$.

Casos especiais

32.3 $F(-p,1;1;-x) = (1+x)^p$

32.4 $F(1,1;2;-x) = [\ln(1+x)]/x$

32.5 $\lim\limits_{n\to\infty} F(1,n;1;x/n) = e^x$

32.6 $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\text{sen}^2\, x) = \cos x$

32.7 $F(\frac{1}{2},1;1;\text{sen}^2\, x) = \sec x$

32.8 $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) = (\text{arc sen } x)/x$

32.9 $F(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2) = (\text{arc tg } x)/x$

32.10 $F(1,p;p;x) = 1/(1-x)$

32.11 $F(n+1,-n;1;(1-x)/2) = P_n(x)$

32.12 $F(n,-n;\frac{1}{2};(1-x)/2) = T_n(x)$

Solução geral da equação hipergeométrica

Se $a - b$ e $c - a - b$ são todos números não inteiros, então a solução geral válida para $|x| < 1$ é

32.13 $y = AF(a,b;c;x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x)$

Propriedades diversas

32.14 $F(a,b;c;1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$

32.15 $\frac{d}{dx}F(a,b;c;x) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x)$

32.16 $F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$

32.17 $F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;x)$

33 Transformadas de Laplace

Definição da transformada de Laplace de $F(t)$

33.1 $\mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s)$

Em geral, $f(s)$ existirá para $s > \alpha$, onde α é constante. $\mathscr{L}$ é denominado *operador transformada de Laplace*.

Definição da transformada de Laplace inversa de $f(s)$

Se $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$, então dizemos que $F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$ é a *transformada de Laplace inversa* de $f(s)$. $\mathscr{L}^{-1}$ é denominado *operador transformada de Laplace inverso*.

Fórmula complexa da inversão

A transformada de Laplace inversa de $f(s)$ pode ser encontrada diretamente pelos métodos da teoria de Variáveis Complexas. O resultado é

33.2 $F(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s)\,ds = \dfrac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} f(s)\,ds$

onde c é escolhido de tal modo que todos os pontos singulares de $f(s)$ encontram-se à esquerda da reta $\operatorname{Re}\{s\} = c$ no plano da variável complexa s.

Tabela das propriedades gerais de transformadas de Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
33.3	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$aF_1(t) + bF_2(t)$
33.4	$f(s/a)$	$a F(at)$
33.5	$f(s-a)$	$e^{at}F(t)$
33.6	$e^{-as}f(s)$	$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
33.7	$sf(s) - F(0)$	$F'(t)$
33.8	$s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$	$F''(t)$
33.9	$s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
33.10	$f'(s)$	$-tF(t)$
33.11	$f''(s)$	$t^2F(t)$
33.12	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
33.13	$\dfrac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)du$
33.14	$\dfrac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)du^n = \int_0^t \dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)du$
33.15	$f(s)g(s)$	$\int_0^t F(u)G(t-u)du$

	$f(s)$	$F(t)$
33.16	$\int_s^\infty f(u)du$	$\dfrac{F(t)}{t}$
33.17	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)du$	$F(t) = F(t+T)$
33.18	$\dfrac{f(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)du$
33.19	$\dfrac{1}{s}f\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})F(u)du$
33.20	$\dfrac{1}{s^{n+1}}f\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})F(u)du$
33.21	$\dfrac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du$
33.22	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)du$	$F(t^2)$
33.23	$\dfrac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \dfrac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}du$
33.24	$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ = polinômio de grau menor do que n, $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ \dots\ (s-\alpha_n)$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são todos distintos.	$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\ e^{\alpha_k t}$

Tabela de transformadas de Laplace especiais

	$f(s)$	$F(t)$
33.25	$\dfrac{1}{s}$	1
33.26	$\dfrac{1}{s^2}$	t
33.27	$\dfrac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
33.28	$\dfrac{1}{s^n} \quad n > 0$	$\dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
33.29	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
33.30	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
33.31	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$	$\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
33.32	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at}{a}$
33.33	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
33.34	$\dfrac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\dfrac{e^{bt} \operatorname{sen} at}{a}$
33.35	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \cos at$
33.36	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at}{a}$
33.37	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
33.38	$\dfrac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\dfrac{e^{bt} \operatorname{senh} at}{a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.39	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
33.40	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
33.41	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
33.42	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at - at\cos at}{2a^3}$
33.43	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at}{2a}$
33.44	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at + at\cos at}{2a}$
33.45	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\operatorname{sen} at$
33.46	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
33.47	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \operatorname{senh} at}{2a^3}$
33.48	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{senh} at}{2a}$
33.49	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at + at\cosh at}{2a}$
33.50	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\operatorname{senh} at$
33.51	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$t\cosh at$
33.52	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at - 3at\cos at}{8a^5}$
33.53	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at - at^2\cos at}{8a^3}$
33.54	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\operatorname{sen} at - at\cos at}{8a^3}$
33.55	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{sen} at + at^2\cos at}{8a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.56	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at + 5at\cos at}{8a}$
33.57	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\operatorname{sen} at}{8}$
33.58	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{sen} at}{2a}$
33.59	$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
33.60	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
33.61	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{sen} at}{24a}$
33.62	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at - 3at\cosh at}{8a^5}$
33.63	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at - t\operatorname{senh} at}{8a^3}$
33.64	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\operatorname{senh} at}{8a^3}$
33.65	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{senh} at + at^2\cosh at}{8a}$
33.66	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at + 5at\cosh at}{8a}$
33.67	$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\operatorname{senh} at}{8}$
33.68	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{senh} at}{2a}$
33.69	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
33.70	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
33.71	$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{senh} at}{24a}$
33.72	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

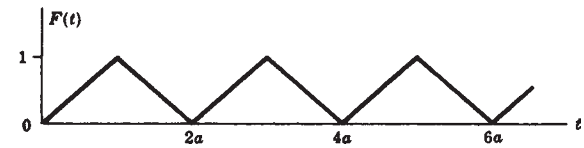
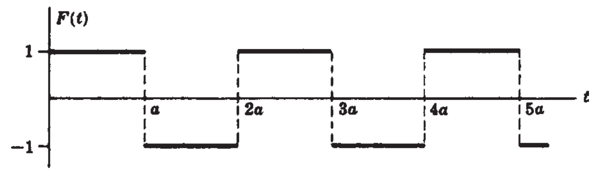
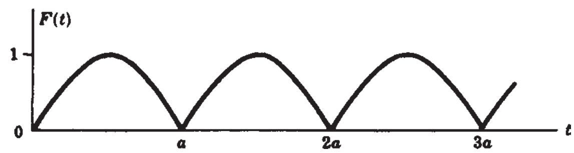
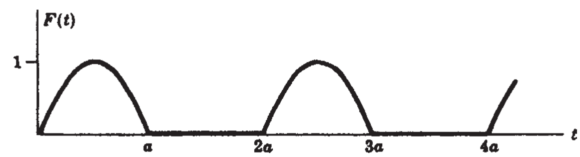
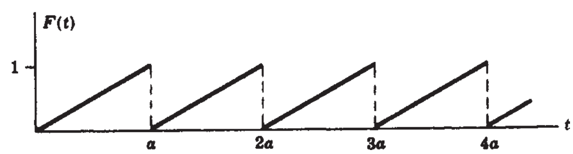
	$f(s)$	$F(t)$
33.73	$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+\sqrt{3}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
33.74	$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
33.75	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$
33.76	$\dfrac{s}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
33.77	$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
33.78	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\text{sen}\,at\cosh at-\cos at\,\text{senh}\,at)$
33.79	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\text{sen}\,at\,\text{senh}\,at}{2a^2}$
33.80	$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\text{sen}\,at\cosh at+\cos at\,\text{senh}\,at)$
33.81	$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
33.82	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\text{senh}\,at-\text{sen}\,at)$
33.83	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
33.84	$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\text{senh}\,at+\text{sen}\,at)$
33.85	$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
33.86	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
33.87	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\text{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
33.88	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\,\text{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
33.89	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-b\,e^{b^2t}\,\text{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$

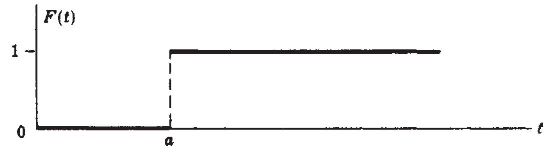
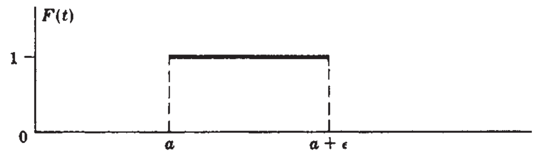
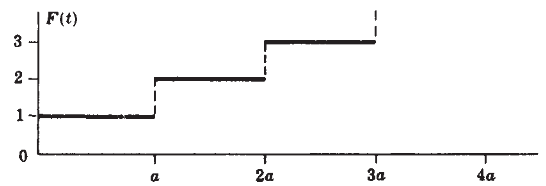
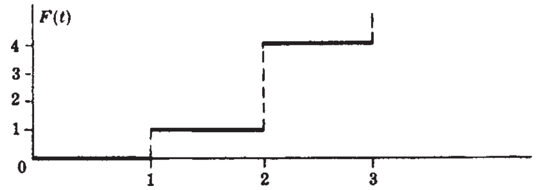
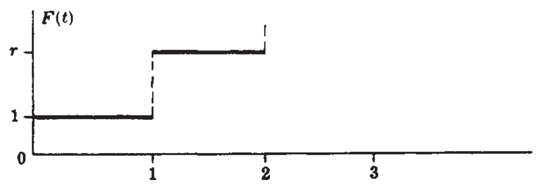
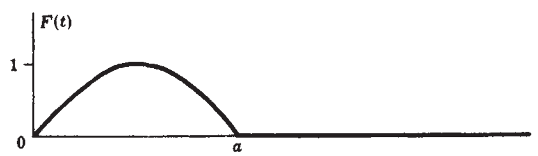
	$f(s)$	$F(t)$
33.90	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
33.91	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
33.92	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n>-1$	$a^n J_n(at)$
33.93	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n>-1$	$a^n I_n(at)$
33.94	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
33.95	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t>b \\ 0 & t<b \end{cases}$
33.96	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tJ_1(at)}{a}$
33.97	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$
33.98	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at)-atJ_1(at)$
33.99	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tI_1(at)}{a}$
33.100	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$tI_0(at)$
33.101	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at)+atI_1(at)$
33.102	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ Ver também 33.165.	$F(t)=n, n \leqq t < n+1, n=0,1,2,\ldots$
33.103	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$ onde $[t]$ = maior inteiro $\leqq t$
33.104	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Ver também 33.167.	$F(t)=r^n, n \leqq t < n+1, n=0,1,2,\ldots$
33.105	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.106	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
33.107	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
33.108	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
33.109	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
33.110	$\dfrac{1-e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
33.111	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
33.112	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
33.113	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t a^{2n+1}}} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})du$
33.114	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$
33.115	$\dfrac{\ln[(s^2+a^2)/a^2]}{2s}$	$Ci(at)$
33.116	$\dfrac{\ln[(s+a)/a]}{s}$	$Ei(at)$
33.117	$-\dfrac{(\gamma+\ln s)}{s}$ $\gamma =$ constante de Euler $= 0{,}5772156\ldots$	$\ln t$
33.118	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at-\cos bt)}{t}$
33.119	$\dfrac{\pi^2}{6s}+\dfrac{(\gamma+\ln s)^2}{s}$ $\gamma =$ constante de Euler $= 0{,}5772156\ldots$	$\ln^2 t$
33.120	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t+\gamma)$ $\gamma =$ constante de Euler $= 0{,}5772156\ldots$
33.121	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t+\gamma)^2-\frac{1}{6}\pi^2$ $\gamma =$ constante de Euler $= 0{,}5772156\ldots$

	$f(s)$	$F(t)$
33.122	$\dfrac{\Gamma'(n+1)-\Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \quad n>-1$	$t^n \ln t$
33.123	$\text{arc tg}\,(a/s)$	$\dfrac{\text{sen}\,at}{t}$
33.124	$\dfrac{\text{arc tg}\,(a/s)}{s}$	$Si(at)$
33.125	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\,\text{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
33.126	$e^{s^2/4a^2}\text{erfc}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}\,e^{-a^2t^2}$
33.127	$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\text{erfc}(s/2a)}{s}$	$\text{erf}(at)$
33.128	$\dfrac{e^{as}\text{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
33.129	$e^{as}Ei(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
33.130	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\text{sen}\,as\,Ci(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
33.131	$\text{sen}\,as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}+\cos as\,Ci(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
33.132	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\text{sen}\,as\,Ci(as)}{s}$	$\text{arc tg}\,(t/a)$
33.133	$\dfrac{\text{sen}\,as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\cos as\,Ci(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
33.134	$\left[\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right]^2+Ci^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
33.135	0	$\mathcal{N}(t)$ = função nula
33.136	1	$\delta\,(t)$ = função delta
33.137	e^{-as}	$\delta(t-a)$
33.138	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Ver também 33.163.	$\mathcal{U}(t-a)$

	$f(s)$	$F(t)$
33.139	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
33.140	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.141	$\dfrac{\cosh sx}{s \operatorname{senh} as}$	$\dfrac{t}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi t}{a}$
33.142	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.143	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{xt}{a}+\dfrac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi t}{a}$
33.144	$\dfrac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}$	$x+\dfrac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.145	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\dfrac{t^2}{2a}+\dfrac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\left(1-\cos\dfrac{n\pi t}{a}\right)$
33.146	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t+\dfrac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.147	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\dfrac{1}{2}(t^2+x^2-a^2)-\dfrac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.148	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
33.149	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.150	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.151	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}$
33.152	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
33.153	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}$	$1+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.154	$\dfrac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s^2\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a}+\dfrac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}(1-e^{-n^2\pi^2 t/a^2})\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}$
33.155	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{2}(x^2-a^2)+t-\dfrac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.156	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{sJ_0(ia\sqrt{s})}$	$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ são as raízes positivas de $J_0(\lambda) = 0$
33.157	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2-a^2)+t+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ são as raízes positivas de $J_0(\lambda) = 0$
33.158	$\dfrac{1}{as^2}\operatorname{tgh}\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Função onda triangular  *Fig. 33-1*
33.159	$\dfrac{1}{s}\operatorname{tgh}\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Função onda quadrada  *Fig. 33-2*
33.160	$\dfrac{\pi a}{a^2s^2+\pi^2}\operatorname{cotgh}\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Função onda senoidal retificada  *Fig. 33-3*
33.161	$\dfrac{\pi a}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})}$	Função onda senoidal semirretificada  *Fig. 33-4*
33.162	$\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Função onda dente de serra  *Fig. 33-5*

	$f(s)$	$F(t)$
33.163	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Ver também 33.138.	Função unitária de Heaviside $\mathcal{U}(t-a)$  *Fig. 33-6*
33.164	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	Função pulso  *Fig. 33-7*
33.165	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ Ver também 33.102.	Função escada  *Fig. 33-8*
33.166	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$  *Fig. 33-9*
33.167	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Ver também 33.104.	$F(t) = r^n,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$  *Fig. 33-10*
33.168	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t > a \end{cases}$  *Fig. 33-11*

Transformadas de Fourier

34

Teorema integral de Fourier

34.1 $f(x)=\int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x\}d\alpha$

onde

34.2 $$\begin{cases} A(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \\ B(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\, dx \end{cases}$$

Condições suficientes para valer este teorema são:

(i) $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas por partes em cada intervalo finito $-L < x < L$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge;

(iii) $f(x)$ é substituído por $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$, se x é um ponto de descontinuidade.

Formas equivalentes do teorema integral de Fourier

34.3 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du\,d\alpha$

34.4 $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(x-u)}du\,d\alpha$$

34.5 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha\int_0^\infty f(u)\operatorname{sen}\alpha u\, du$

onde $f(x)$ é uma *função ímpar* $[f(-x) = -f(x)]$.

34.6 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos\alpha x\, d\alpha\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\, du$

onde $f(x)$ é uma *função par* $[f(-x) = f(x)]$.

Transformadas de Fourier

A transformada de Fourier de $f(x)$ é definida por

34.7 $\mathscr{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$

Então, por 34.7, a transformada de Fourier inversa de $F(\alpha)$ é

34.8 $\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$

Chamamos $f(x)$ e $F(\alpha)$ de *pares de transformadas de Fourier*.

Teorema da convolução para transformadas de Fourier

Se $F(\alpha) = \mathscr{F}\{f(x)\}$ e $G(\alpha) = \mathscr{F}\{g(x)\}$, então

34.9 $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)G(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du = f^{*}g$

onde $f^{*}g$ é denominada *convolução* de f e g. Assim,

34.10 $\mathscr{F}\{f^{*}g\} = \mathscr{F}\{f\}\,\mathscr{F}\{g\}$

Identidade de Parseval

Se $F(\alpha) = \mathscr{F}\{f(x)\}$, então

34.11 $\int_{-\infty}^{\infty} |\,f(x)\,|^2 dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\,F(\alpha)\,|^2 d\alpha$

Mais geralmente, se $F(\alpha) = \mathscr{F}\{f(x)\}$ e $G(\alpha) = \mathscr{F}\{g(x)\}$, então

34.12 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}\,d\alpha$

onde a barra denota o conjugado complexo.

Transformada seno de Fourier

A transformada seno de Fourier de $f(x)$ é definida por

34.13 $F_S(\alpha) = \mathscr{F}_S\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,dx$

Então, por 34.13, a transformada seno de Fourier inversa de $F_s(\alpha)$ é

34.14 $f(x) = \mathscr{F}_S^{-1}\{F_S(\alpha)\} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,d\alpha$

Transformada cosseno de Fourier

A transformada cosseno de Fourier de $f(x)$ é definida por

34.15 $F_C(\alpha) = \mathscr{F}_C\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx$

Então, por 34.15, a transformada seno de Fourier inversa de $F_C(\alpha)$ é

34.16 $f(x) = \mathscr{F}_C^{-1}\{F_C(\alpha)\} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty F_C(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha$

Pares de transformada de Fourier especiais

	$f(x)$	$F(\alpha)$
34.17	$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < b \\ 0 & \lvert x\rvert > b \end{cases}$	$\dfrac{2\,\text{sen}\, b\alpha}{\alpha}$
34.18	$\dfrac{1}{x^2+b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{b}$
34.19	$\dfrac{x}{x^2+b^2}$	$-i\pi e^{-b\alpha}$
34.20	$f^{(n)}(x)$	$i^n\alpha^n F(\alpha)$
34.21	$x^n f(x)$	$i^n \dfrac{d^n F}{d\alpha^n}$
34.22	$f(bx)e^{itx}$	$\dfrac{1}{b}F\left(\dfrac{\alpha-t}{b}\right)$

Transformadas seno de Fourier especiais

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
34.23	$\begin{cases} 1 & 0 < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\dfrac{1 - \cos b\alpha}{\alpha}$
34.24	x^{-1}	$\dfrac{\pi}{2}$
34.25	$\dfrac{x}{x^2 + b^2}$	$\dfrac{\pi}{2} e^{-b\alpha}$
34.26	e^{-bx}	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}$
34.27	$x^{n-1}e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n)\,\mathrm{sen}(n \operatorname{arc\,tg} \alpha/b)}{(\alpha^2 + b^2)^{n/2}}$
34.28	xe^{-bx^2}	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} \alpha e^{-\alpha^2/4b}$
34.29	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
34.30	x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1} \operatorname{cosec}(n\pi/2)}{2\Gamma(n)} \quad 0 < n < 2$
34.31	$\dfrac{\mathrm{sen}\, bx}{x}$	$\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{\alpha + b}{\alpha - b}\right)$
34.32	$\dfrac{\mathrm{sen}\, bx}{x^2}$	$\begin{cases} \pi\alpha / 2 & \alpha < b \\ \pi b / 2 & \alpha > b \end{cases}$
34.33	$\dfrac{\cos bx}{x}$	$\begin{cases} 0 & \alpha < b \\ \pi / 4 & \alpha = b \\ \pi / 2 & \alpha > b \end{cases}$
34.34	$\operatorname{arc\,tg}(x / b)$	$\dfrac{\pi}{2\alpha} e^{-b\alpha}$
34.35	$\operatorname{cosec} bx$	$\dfrac{\pi}{2b} \operatorname{tgh} \dfrac{\pi\alpha}{2b}$
34.36	$\dfrac{1}{e^{2x} - 1}$	$\dfrac{\pi}{4} \operatorname{cotgh}\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) - \dfrac{1}{2\alpha}$

Transformadas cosseno de Fourier especiais

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
34.37	$\begin{cases} 1 & 0 < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen} b\alpha}{\alpha}$
34.38	$\dfrac{1}{x^2 + b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{2b}$
34.39	e^{-bx}	$\dfrac{b}{\alpha^2 + b^2}$
34.40	$x^{n-1}e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n)\cos(n \text{ arc tg } \alpha/b)}{(\alpha^2 + b^2)^{n/2}}$
34.41	e^{-bx^2}	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}e^{-\alpha^2/4b}$
34.42	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
34.43	x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1}\sec(n\pi/2)}{2\Gamma(n)}, \quad 0 < n < 1$
34.44	$\ln\left(\dfrac{x^2 + b^2}{x^2 + c^2}\right)$	$\dfrac{e^{-c\alpha} - e^{-b\alpha}}{\pi\alpha}$
34.45	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{x}$	$\begin{cases} \pi/2 & \alpha < b \\ \pi/4 & \alpha = b \\ 0 & \alpha > b \end{cases}$
34.46	$\operatorname{sen} bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos\dfrac{\alpha^2}{4b} - \operatorname{sen}\dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
34.47	$\cos bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos\dfrac{\alpha^2}{4b} + \operatorname{sen}\dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
34.48	$\operatorname{sech} bx$	$\dfrac{\pi}{2b}\operatorname{sech}\dfrac{\pi\alpha}{2b}$
34.49	$\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}x/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}x)}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}\alpha/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}\alpha)}$
34.50	$\dfrac{e^{-b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\{\cos(2b\sqrt{\alpha}) - \operatorname{sen}(2b\sqrt{\alpha})\}$

35 Funções Elípticas

Integral elíptica incompleta de 1ª espécie

35.1 $u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{x} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$

onde $\phi = \operatorname{am} u$ é denominada *amplitude* de u, $x = \operatorname{sen}\phi$ e sempre $0 < k < 1$, tanto nesta equação quanto nas equações a seguir.

Integral elíptica completa de 1ª espécie

35.2 $K = F(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{1} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

Integral elíptica incompleta de 2ª espécie

35.3 $E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{x} \frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}\, dv$

Integral elíptica completa de 2ª espécie

35.4 $E = E(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{1} \frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}\, dv$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

Integral elíptica incompleta de 3ª espécie

35.5 $\Pi(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\,\text{sen}^2\,\theta)\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,\theta}} = \int_0^{x} \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$

Integral elíptica completa de 3ª espécie

35.6 $\Pi(k,n,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\,\text{sen}^2\,\theta)\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,\theta}} = \int_0^{1} \frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$

Transformação de Landen

35.7 $\text{tg}\,\phi = \frac{\text{sen}\,2\phi_1}{k+\cos 2\phi_1}$ ou $k\,\text{sen}\,\phi = \text{sen}\,(2\phi_1 - \phi)$

Isto resulta em

35.8 $F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\,\theta}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\phi_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1-k_1^2\,\text{sen}^2\,\theta_1}}$

onde $k_1 = 2\sqrt{k}/(1+k)$. Por aplicações sucessivas são obtidas sequências $k_1, k_2, k_3, \ldots$ e $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ tais que $k < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < 1$, onde $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$. Segue-se que

35.9 $F(k,\Phi) = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}} \int_0^{\Phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\,\theta}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}}\ \ln \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$

onde

35.10 $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad \ldots$ e $\Phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$

Este resultado é usado no cálculo aproximado de $F(k, \phi)$.

Funções elípticas de Jacobi

A partir de 35.1, definimos as seguintes funções elípticas:

35.11 $x = \text{sen}\,(\text{am}\ u) = \text{sn}\ u$

35.12 $\sqrt{1-x^2} = \cos\,(\text{am}\ u) = \text{cn}\ u$

35.13 $\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\,\text{sn}^2\,u} = \text{dn}\ u$

Podemos também definir as funções inversas de sn u, cn u e dn u, bem como as seguintes.

35.14 $\text{ns}\,u = \frac{1}{\text{sn}\,u}$

35.15 $\text{nc}\,u = \frac{1}{\text{cn}\,u}$

35.16 $\text{nd}\,u = \frac{1}{\text{dn}\,u}$

35.17 $\text{sc}\,u = \frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$

35.18 $\text{sd}\,u = \frac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u}$

35.19 $\text{cd}\,u = \frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$

35.20 $\text{cs}\,u = \frac{\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}$

35.21 $\text{dc}\,u = \frac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}$

35.22 $\text{ds}\,u = \frac{\text{dn}\,u}{\text{dn}\,u}$

Fórmulas de adição

35.23 $\operatorname{sn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$

35.24 $\operatorname{cn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$

35.25 $\operatorname{dn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$

Derivadas

35.26 $\dfrac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$

35.27 $\dfrac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$

35.28 $\dfrac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$

35.29 $\dfrac{d}{du} \operatorname{sc} u = \operatorname{dc} u \operatorname{nc} u$

Expansões em séries

35.30 $\operatorname{sn} u = u - (1+k^2)\dfrac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\dfrac{u^5}{5!} - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6)\dfrac{u^7}{7!} + \cdots$

35.31 $\operatorname{cn} u = 1 - \dfrac{u^2}{2!} + (1+4k^2)\dfrac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\dfrac{u^6}{6!} + \cdots$

35.32 $\operatorname{dn} u = 1 - k^2 \dfrac{u^2}{2!} + k^2(4+k^2)\dfrac{u^4}{4!} - k^2(16 + 44k^2 + k^4)\dfrac{u^6}{6!} + \cdots$

Constante de Catalan

35.33 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 K\,dk = \dfrac{1}{2}\int_{k=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \dfrac{d\theta\, dk}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} = \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} - \cdots = 0{,}915965594\ldots$

Períodos de funções elípticas

Sejam

35.34 $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \qquad K' = \int_0^{\pi/2} \dfrac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$ onde $k' = \sqrt{1-k^2}$

Então,

35.35 sn u tem períodos $4K$ e $2iK'$

35.36 cn u tem períodos $4K$ e $2K + 2iK'$

35.37 dn u tem períodos $2K$ e $4iK'$

Identidades envolvendo funções elípticas

35.38 $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$

35.39 $\text{dn}^2 u + k^2\,\text{sn}^2\,u = 1$

35.40 $\text{dn}^2 u - k^2\text{cn}^2 u = k'^2$ onde $k' = \sqrt{1-k^2}$

35.41 $\text{sn}^2 u = \dfrac{1-\text{cn}\ 2u}{1+\text{dn}\ 2u}$

35.42 $\text{cn}^2 u = \dfrac{\text{dn}\,2u + \text{cn}\,2u}{1+\text{dn}\,2u}$

35.43 $\text{dn}^2 u = \dfrac{1-k^2+\text{dn}\,2u + k^2\text{cn}\,u}{1+\text{dn}\,2u}$

35.44 $\sqrt{\dfrac{1-\text{cn}\,2u}{1+\text{cn}\,2u}} = \dfrac{\text{sn}\,u\,\text{dn}\,u}{\text{cn}\ u}$

35.45 $\sqrt{\dfrac{1-\text{dn}\,2u}{1+\text{dn}\,2u}} = \dfrac{k\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$

Valores especiais

35.46 $\text{sn}\ 0 = 0$ **35.47** $\text{cn}\ 0 = 1$ **35.48** $\text{dn}\ 0 = 1$ **35.49** $\text{sc}\ 0 = 0$ **35.50** $\text{am}\ 0 = 0$

Integrais

35.51 $\displaystyle\int \text{sn}\ u\,du = \frac{1}{k}\ln(\text{dn}\ u - k\ \text{cn}\ u)$

35.52 $\displaystyle\int \text{cn}\ u\ du = \frac{1}{k}\ \text{arc cos}(\text{dn}\ u)$

35.53 $\displaystyle\int \text{dn}\ u\ du = \text{arc sen}(\text{sn}\ u)$

35.54 $\displaystyle\int \text{sc}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\text{dc}\ u + \sqrt{1-k^2}\,\text{nc}\ u\right)$

35.55 $\displaystyle\int \text{cs}\ u\ du = \ln(\text{ns}\ u - \text{ds}\ u)$

35.56 $\displaystyle\int \text{cd}\ u\ du = \frac{1}{k}\ln\,(\text{nd}\ u + k\ \text{sd}\ u)$

35.57 $\displaystyle\int \text{dc}\ u\,du = \ln(\text{nc}\ u + \text{sc}\ u)$

35.58 $\displaystyle\int \text{sd}\ u\ du = \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}}\ \text{arc sen}(k\ \text{cd}\ u)$

35.59 $\displaystyle\int \text{ds}\ u\,du = \ln(\text{ns}\ u - \text{cs}\ u)$

35.60 $\displaystyle\int \text{ns}\ u\ du = \ln(\text{ds}\ u - \text{cs}\ u)$

35.61 $\displaystyle\int \text{nc}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\text{dc}\ u + \frac{\text{sc}\ u}{\sqrt{1-k^2}}\right)$

35.62 $\displaystyle\int \text{nd}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ \text{arc cos}(\text{cd}\ u)$

Relação de Legendre

35.63 $EK' + E'K - KK' = \pi/2$

onde

35.64 $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \qquad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$

35.65 $E' = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \qquad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$

Outras Funções Especiais 36

Função erro $\mathbf{erf}\,(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$

36.1 $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \dfrac{x^3}{3 \cdot 1!} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots\right)$

36.2 $\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$

36.3 $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \qquad \operatorname{erf}(0) = 0, \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$

Função erro complementar $\mathbf{erfc}\,(x) = 1 - \mathbf{erf}\,(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$

36.4 $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \dfrac{x^3}{3 \cdot 1!} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots\right)$

36.5 $\operatorname{erfc}(x) \sim \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right)$

36.6 $\operatorname{erfc}(0) = 1, \qquad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$

Integral exponencial $\mathbf{Ei}\,(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$

36.7 $\operatorname{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \displaystyle\int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du$

36.8 $\operatorname{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \left(\dfrac{x}{1 \cdot 1!} - \dfrac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dfrac{x^3}{3 \cdot 3!} - \cdots\right)$

36.9 $\operatorname{Ei}(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{x}\left(1 - \dfrac{1!}{x} + \dfrac{2!}{x^2} - \dfrac{3!}{x^3} + \cdots\right)$

36.10 $\operatorname{Ei}(\infty) = 0$

Integral seno $\mathbf{Si}\,(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$

36.11 $\operatorname{Si}(x) = \dfrac{x}{1 \cdot 1!} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dfrac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$

36.12 $\mathrm{Si}(x) \sim \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3!}{x^3} + \dfrac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \dfrac{\cos x}{x}\left(1 - \dfrac{2!}{x^2} + \dfrac{4!}{x^4} - \cdots\right)$

36.13 $\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x), \qquad \mathrm{Si}(0) = 0, \qquad \mathrm{Si}(\infty) = \pi/2$

Integral cosseno $\quad \mathbf{Ci}(x) = \int_x^\infty \dfrac{\cos u}{u}\,du$

36.14 $\mathrm{Ci}(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \dfrac{1-\cos u}{u}\,du$

36.15 $\mathrm{Ci}(x) = -\gamma - \ln x + \dfrac{x^2}{2 \cdot 2!} - \dfrac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dfrac{x^6}{6 \cdot 6!} - \dfrac{x^8}{8 \cdot 8!} + \cdots$

36.16 $\mathrm{Ci}(x) \sim \dfrac{\cos x}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3!}{x^3} + \dfrac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\left(1 - \dfrac{2!}{x^2} + \dfrac{4!}{x^4} - \cdots\right)$

36.17 $\mathrm{Ci}(\infty) = 0$

Integral seno de Fresnel $\quad S(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^x \operatorname{sen} u^2\,du$

36.18 $S(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{x^3}{3 \cdot 1!} - \dfrac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dfrac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dfrac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \cdots\right)$

36.19 $S(x) \sim \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\cos x^2)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) + (\operatorname{sen} x^2)\left(\dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

36.20 $S(-x) = -S(x), \qquad S(0) = 0, \qquad S(\infty) = \dfrac{1}{2}$

Integral cosseno de Fresnel $\quad C(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^x \cos u^2\,du$

36.21 $C(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 2!} + \dfrac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dfrac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \cdots\right)$

36.22 $C(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\operatorname{sen} x^2)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) - (\cos x^2)\left(\dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

36.23 $C(-x) = -C(x), \qquad C(0) = 0, \qquad C(\infty) = \dfrac{1}{2}$

Função zeta de Riemann $\quad \zeta(x) = \dfrac{1}{1^x} + \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x} + \cdots$

36.24 $\zeta(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \dfrac{u^{x-1}}{e^{u-1}}\,du, \qquad x > 1$

36.25 $\zeta(1-x) = 2^{1-x}\pi^{-x}\Gamma(x)\cos(\pi x/2)\zeta(x)$ [extensões para outros valores]

36.26 $\zeta(2k) = \dfrac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{(2k)!} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

Desigualdades 37

Desigualdade triangular

37.1 $\big||a_1| - |a_2|\big| \leqq |a_1 + a_2| \leqq |a_1| + |a_2|$

37.2 $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

37.3 $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

A igualdade dá-se se, e somente se, $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$.

Relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica

Se A, G e H são as médias aritmética, geométrica e harmônica dos números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então

37.4 $H \leqq G \leqq A$

onde

37.5 $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

37.6 $G = \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n}$

37.7 $\dfrac{1}{H} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)$

A igualdade dá-se se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Desigualdade de Hölder

37.8 $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqq (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p}(|b_1|^q + |b_2|^q + \cdots + |b_n|^q)^{1/q}$

onde

37.9 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \qquad p > 1, q > 1$

A igualdade dá-se se, e somente se, $|a_1|^{p-1}/|b_1| = |a_2|^{p-1}/|b_2| = \cdots = |a_n|^{p-1}/|b_n|$. Para $p = q = 2$, se reduz a 37.3.

Desigualdade de Chebyshev

Se $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ e $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, então

37.10 $$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}$$

ou

37.11 $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

Desigualdade de Minkowski

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ são todos positivos e $p > 1$, então

37.12 $$\{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\}^{1/p} \leqq (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}$$

A igualdade dá-se se, e somente se, $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais

37.13 $$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqq \left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right\}$$

A igualdade dá-se se, e somente se, $f(x)/g(x)$ for uma constante.

Desigualdade de Hölder para integrais

37.14 $$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}$$

onde $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, $q > 1$. Se $p = q = 2$, isso reduz-se a 37.13.

A igualdade dá-se se, e somente se, $|f(x)|^{p-1}/|g(x)|$ for uma constante.

Desigualdade de Minkowski para integrais

Se $p > 1$,

37.15 $$\left\{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

A igualdade dá-se se, e somente se, $f(x)/g(x)$ for uma constante.

Produtos Infinitos

38

38.1 $\operatorname{sen} x = x\left(1-\dfrac{x^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.2 $\cos x = \left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.3 $\operatorname{senh} x = x\left(1+\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.4 $\cosh x = \left(1+\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.5 $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\left\{\left(1+\dfrac{x}{1}\right)e^{-x}\right\}\left\{\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{-x/2}\right\}\left\{\left(1+\dfrac{x}{3}\right)e^{-x/3}\right\}\cdots$

Ver também 25.12.

38.6 $J_0(x) = \left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são as raízes positivas de $J_0(x) = 0$.

38.7 $J_1(x) = x\left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são as raízes positivas de $J_1(x) = 0$.

38.8 $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{8}\cos\dfrac{x}{16}\cdots$

38.9 $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\cdots$

Este é chamado o *produto de Wallis.*

39 Estatística Descritiva

Os dados numéricos $x_1, x_2, \ldots$ provêm ou de uma amostra aleatória de uma população maior ou então da própria população maior. Vamos distinguir entre estes dois casos usando notações diferentes, como segue:

n = número de itens de uma amostra
N = número de itens de uma população

$\bar{x}$ = média de amostra (leia-se "xis barra")	μ = média de população (leia-se "mu")
s^2 = variância de amostra	σ^2 = variância de população
s = desvio padrão de amostra	σ = desvio padrão de população

Observe que as letras gregas são usadas com populações e são denominadas *parâmetros*, enquanto que letras latinas são usadas com amostras e são denominadas *estatísticas*. Em primeiro lugar apresentamos fórmulas para os dados provenientes de uma amostra e, em seguida, damos as fórmulas para uma população.

Dados agrupados

Os dados numéricos são, frequentemente, coletados em grupos (dados agrupados). Um grupo se refere a um conjunto de dados, todos com o mesmo valor x_i ou a um conjunto (classe) de dados num dado intervalo, com valor de classe x_i. Neste caso, supomos que há k grupos e que f_i denota o número de dados do grupo com valor ou valor de classe x_i. Assim, o número total de dados disponíveis é

39.1 $n = \sum f_i$

Como é costumeiro, Σ denota um somatório sobre todos os valores do índice, a menos de menção explícita em contrário.

Em vista disso, algumas das fórmulas serão denotadas por (a) ou por (b), onde (a) indica dados que não estão agrupados e (b) denota dados agrupados.

Medidas de tendência central

Média (*média aritmética*)

A *média aritmética* ou, simplesmente, a *média* de uma amostra $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que é muitas vezes denominada "valor médio", é a soma dos valores dividida pelo número de valores, ou seja,

39.2(a) Média amostral: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$

39.2(b) Média amostral: $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

Mediana

Vamos supor, agora, que os dados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão arranjados em ordem crescente. A *mediana* dos dados, denotada por

$$M \text{ ou Mediana}$$

é definida como o "valor central", ou seja:

39.3(a) $$\text{Mediana} = \begin{cases} x_{k+1} & \text{se } n \text{ é ímpar e } n = 2k+1, \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} & \text{se } n \text{ é par e } n = 2k. \end{cases}$$

A mediana de dados agrupados é obtida encontrando primeiro a função de *frequência acumulada* F_s. Mais especificamente, definimos

$$F_s = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$$

ou seja, F_s é a soma das frequências anteriores a f_s inclusive. Então

39.3(b.1) $$\text{Mediana} = \begin{cases} x_{j+1} & \text{se } n = 2k+1 \text{ (ímpar) e } F_j < k+1 \leqq F_{j+1} \\ \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2} & \text{se } n = 2k \text{ (par) e } F_j = k. \end{cases}$$

Encontrar a mediana de dados arranjados em classes é mais complicado. Em primeiro lugar encontramos a classe mediana m, que é a classe com o valor mediano e em seguida interpolamos linearmente na classe usando a fórmula

39.3(b.2) $$\text{Mediana} = L_m + c\,\frac{(n/2) - F_{m-1}}{f_m}$$

onde L_m denota o limite inferior da classe m que contém o valor mediano e c denota a amplitude (comprimento do intervalo) da classe m.

Moda

A moda é o valor ou valores que ocorrem mais frequentemente, ou seja,

39.4 Moda $x_m =$ valor numérico que ocorre o maior número de vezes

A moda não está definida se cada x_m ocorre o mesmo número de vezes e quando a moda está definida ela pode não ser única.

Médias ponderada e grande

Suponha que a cada x_i seja associado um peso $w_i \geq 0$. Então

39.5 Média ponderada $$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_kx_k}{w_1 + w_2 + \cdots + w_k} = \frac{\Sigma\, w_i x_i}{\Sigma\, w_i}$$

Observe que 39.2(b.1) é um caso especial de 39.4 quando o peso w_i de x_i é a sua frequência.

Suponha que existam k conjuntos de amostras e que o i-ésimo conjunto tem n_i elementos e uma média $\bar{x}$. Então a *grande média*, denotada por $\bar{\bar{x}}_i$ é a "média das médias" onde cada média é ponderada pelo número de elementos de seu conjunto. Especificamente:

39.6 Grande média $$\bar{\bar{x}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \cdots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\Sigma\, n_i \bar{x}_i}{\Sigma\, n_i}$$

Médias geométrica e harmônica

A *média geométrica* (m_g) e a *média harmônica* (m_h) são definidas como segue.

39.7(a) $\mathrm{m_g} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$

39.7(b) $\mathrm{m_g} = \sqrt[n]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \cdots x_k^{f_k}}$

39.8(a) $\mathrm{m_h} = \dfrac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n} = \dfrac{n}{\Sigma\,(1/x_i)}$

39.8(b) $\mathrm{m_h} = \dfrac{n}{f_1/x_1 + f_2/x_2 + \cdots + f_k/x_k} = \dfrac{n}{\Sigma\,(f_k/x_i)}$

Relação entre as médias aritmética, geométrica e harmônica

39.9 $\mathrm{m_h} \le \mathrm{m_g} \le \bar{x}$

A igualdade vale somente quando todos os valores dos dados são iguais.

Ponto médio

O *ponto médio amostral* é a média entre os limites inferior x_1 e superior x_n dos dados, ou seja, entre o menor e o maior valor.

39.10 Ponto médio: $\mathrm{med} = \dfrac{x_1 + x_n}{2}$

Média populacional

A fórmula para a média μ de uma população é dada a seguir.

39.11(a) Média de população: $\mu = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \dfrac{\Sigma\,x_i}{N}$

39.11(b) Média de população: $\mu = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \dfrac{\Sigma\,f_ix_i}{\Sigma\,f_i}$

(Lembre que N denota o número de elementos numa população.)

Observe que a fórmula para a média μ de uma população é a mesma que a fórmula para a média de uma amostra $\bar{x}$. Por outro lado, veremos que a fórmula para o desvio padrão σ de uma população não é a mesma que a fórmula para o desvio padrão s de uma amostra. [Esta é a principal razão para dar fórmulas separadas para μ e $\bar{x}$.]

Medidas de dispersão

Variância e desvio padrão de amostra

Aqui a amostra tem n elementos e média $\bar{x}$.

39.12(a) Variância amostral: $s^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{\Sigma\,x_i^2 - (\Sigma\,x_i)^2/n}{n-1}$

39.12(b) Variância amostral: $s^2 = \dfrac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{(\Sigma\,f_i) - 1} = \dfrac{\Sigma f_ix_i^2 - (\Sigma\,f_ix_i)^2/\Sigma\,f_i}{(\Sigma\,f_i) - 1}$

39.13 Desvio padrão amostral: $s = \sqrt{\text{Variância}} = \sqrt{s^2}$

Exemplo Considere a seguinte distribuição de frequências:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	8	14	7	12	3	1

Então $n = \Sigma f_i = 45$ e $\Sigma f_i x_i = 45$. Portanto, por 39.2(b),

$$\text{Média } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{126}{45} = 2{,}8$$

Também, $n - 1 = 44$ e $\Sigma f_i x_i^2 = 430$. Portanto, por 39.12(*b*) e 39.13,

$$s^2 = \frac{430 - (126)^2/45}{44} \approx 1{,}75 \quad \text{e} \quad s = 1{,}32$$

Obtemos a mediana M encontrando primeiro as frequências acumuladas

$$F_1 = 8, \quad F_2 = 22, \quad F_3 = 29, \quad F_4 = 41, \quad F_5 = 44, \quad F_6 = 45 = n$$

Aqui n é ímpar e $(n + 1)/2 = 23$. Portanto,

$$\text{Mediana } M = 23^{\underline{o}} \text{ valor } = 3$$

O valor 2 ocorre mais frequentemente, portanto

$$\text{Moda} = 2$$

D.M. e R.M.Q.

Aqui D.M. abrevia *desvio médio* e R.M.Q. abrevia *raiz da média dos quadrados*. Como antes, $\bar{x}$ é a média dos dados e, para dados agrupados, $n = \Sigma f_i$.

39.14(a) $\text{D.M.} = \frac{1}{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$

39.14(b) $\text{D.M.} = \frac{1}{n}\left|f_i x_i - \bar{x}\right|$

39.15(a) $\text{R.M.Q.} = \sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma x_i^2)}$

39.15(b) $\text{R.M.Q.} = \sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma f_i x_i^2)}$

Medidas de posição (quartis e percentis)

Vamos supor, agora, que os dados $x_1, x_2, ..., x_n$ estão arranjados em ordem crescente.

39.16 Amplitude: $x_n - x_1$

Existem três quartis: o primeiro quartil, ou inferior, denotado por Q_1 ou Q_L; o segundo quartil, ou mediana, denotado por Q_2 ou Q_M; e o terceiro quartil, ou superior, denotado por Q_3 ou Q_U. Esses quartis (que, essencialmente, dividem os dados em quatro partes) são definidos como segue, onde “metade” significa $n/2$ se n é par e $(n - 1)/2$ se n é ímpar.

39.17 $Q_L(=Q_1)$ = mediana da primeira metade dos valores
M $(=Q_2)$ = mediana dos valores
$Q_U(=Q_3)$ = mediana da segunda metade dos valores

39.18 Resumo de cinco números: $[L, Q_1, Q_2, Q_3, H]$ onde $L = x_1$ (menor valor) e $H = x_n$ (maior valor).

39.19 Amplitude quartil: $Q_3 - Q_1$

39.20 Amplitude semi-quartil: $Q = \frac{Q_U - Q_L}{2}$

O k-ésimo percentil, denotado por P_k, é o número para o qual k por cento dos valores são no máximo P_k e $(100 - k)$ por cento dos valores são maiores do que P_k. Especificamente:

39.21 P_k = maior x_k tal que $F_s \leq k/100$. Assim, Q_1 = 25º percentil, Q_2 = 50º percentil e Q_3 = 75º percentil.

Estatística de ordens superiores

39.22 O momento de ordem r: (a) $m_r = \frac{1}{n}\Sigma x_i^r$, (b) $m_r = \frac{1}{n}\Sigma f_i x_i^r$

39.23 O momento de ordem r centrado na média $\bar{x}$:

(a) $\mu_r = \dfrac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^r$, (b) $\mu_r = \dfrac{1}{n}\Sigma(f_i x_i - \bar{x})^r$

39.24 O momento absoluto de ordem r centrado na média $\bar{x}$:

(a) $\mu_r = \dfrac{1}{n}\Sigma|x_i - \bar{x}|^r$, (b) $\mu_r = \dfrac{1}{n}\Sigma|f_i x_i - \bar{x}|^r$

39.25 O momento de ordem r centrado em $z = 0$:

(a) $\alpha_r = \dfrac{1}{n}\Sigma z_i^r$, (b) $\alpha_r = \dfrac{1}{n}\Sigma f_i z_i^r$, onde $z_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$

Medidas de assimetria e curtose

39.26 Coeficiente de assimetria: $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \alpha_3$

39.27 Momento de assimetria: $\dfrac{\mu_3}{2\sigma^3}$

39.28 Coeficiente de curtose: $\alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$

39.29 Coeficiente de excesso (curtose): $\alpha_4 - 3 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

39.30 Coeficiente de assimetria quartil: $\dfrac{Q_U - 2\hat{x} + Q_L}{Q_U - Q_L} = \dfrac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

Variância e desvio padrão de população

Lembre que N denota o número de valores na população.

39.31 Variância de população: $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{N}$

39.32 Desvio padrão de população: $\sigma = \sqrt{\text{Variância}} = \sqrt{\sigma^2}$

Dados bivariados

As seguintes fórmulas aplicam a uma série de pares de valores numéricos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n),$$

onde os primeiros valores correspondem a uma variável x e os segundos a uma variável y. O objetivo principal é determinar se existe uma relação matemática entre os dados, por exemplo, uma relação linear.

O *diagrama de dispersão* dos dados é simplesmente um esboço dos pares de valores como pontos de um plano coordenado.

Coeficiente de correlação

Um indicador numérico de uma relação linear entre as variáveis x e y é o *coeficiente de correlação amostral* de x e y, definido como segue.

39.33 Coeficiente de correlação amostral: $r = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \Sigma(y_i - \bar{y})^2}}$

Vamos supor que o denominador na Fórmula 39.33 é não nulo. Uma fórmula alternativa para calcular r é a seguinte.

39.34 $r = \dfrac{\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)/n}{\sqrt{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}\ \sqrt{\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n}}$

As propriedades do coeficiente de correlação r são as seguintes.

39.35 (1) $-1 \leqq r \leqq 1$ ou, equivalentemente, $|r| \leqq 1$.
(2) r é positivo (ou negativo) se y cresce (ou decresce) à medida que x cresce.
(3) Quanto mais próximo $|r|$ estiver de 1, mais forte é a relação linear entre x e y.

A *covariância amostral* entre x e y é denotada e definida como segue.

39.36 Covariância amostral: $s_{xy} = \dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n-1}$

Usando a covariância amostral, podemos escrever a Fórmula 39.33 de forma compacta.

39.37 $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

onde s_x e s_y são os desvios padrão das amostras x e y, respectivamente.

Exemplo Considere os seguintes dados.

x	50	45	40	38	32	40	55
y	2,5	5,0	6,2	7,4	8,3	4,7	1,8

O diagrama de dispersão dos dados aparece na Figura 39-1. O coeficiente de correlação r para estes dados pode ser obtido construindo a tabela na Figura 39-2. Então, pela Fórmula 39.34, com $n = 7$, resulta

$$r = \frac{1431{,}8 - (300)(35{,}9)/7}{\sqrt{13.218 - (300)^2/7}\sqrt{218{,}67 + (35{,}9)^2/7}} \approx -0{,}9562$$

Aqui r está perto de -1 e o diagrama de dispersão na Figura 39-1 realmente indica uma forte tendência linear negativa entre x e y.

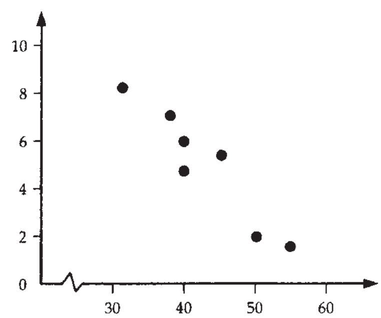


Fig. 39-1

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	50	2,5	2.500	6,25	125,0
	45	5,0	2.025	25,00	225,0
	40	6,2	1.600	38,44	248,0
	38	7,4	1.444	54,76	281,2
	32	8,3	1.024	68,89	265,6
	40	4,7	1.600	22,09	188,0
	55	1,8	3.025	3,24	99,0
Somas	300	35,9	13.218	218,67	1431,8

Fig. 39-2

Reta de regressão

Considere um conjunto de n dados pontuais $P_i\,(x_i, y_i)$. Qualquer reta (não vertical) L pode ser definida por uma equação da forma

$$y = a + bx$$

Seja y_i^* o valor de y no ponto de L correspondente a x_i, ou seja, tome $y_i^* = a + bx_i$. Agora defina e denote o resíduo

$$d_i = y_i - y_i^* = y_i - (a + bx_i)$$

como a distância algébrica vertical entre o ponto P_i e a reta L. A *soma dos quadrados dos resíduos* entre a reta L e os dados pontuais é definida por

39.38 $\Sigma d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$

A *reta dos mínimos quadrados* ou a *reta de melhor ajuste* ou a *linha de regressão* de y em x é, por definição, a reta L cuja soma dos quadrados dos resíduos é a menor possível. Pode-se mostrar que uma tal reta sempre existe e é única.

As constantes a e b na equação $y = a + bx$ da reta L de melhor ajuste podem ser obtidas das seguintes equações *normais*, onde a e b são as incógnitas e n é o número de pontos.

39.39 $$\begin{cases} na + (\Sigma x_i)b = \Sigma y_i \\ (\Sigma x_i)a + (\Sigma x_i^2)b = \Sigma x_i y_i \end{cases}$$

A solução do sistema de equações normais acima é

39.40 $b = \dfrac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \dfrac{rs_y}{s_x}; \qquad a = \dfrac{\Sigma y_i}{n} - b\dfrac{\Sigma x_i}{n} = \overline{y} - b\overline{x}$

A segunda equação nos diz que o ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ está em L e a primeira equação nos diz que o ponto $(\overline{x} + s_x, \overline{y} + rs_y)$ também está em L.

Exemplo Vamos obter a reta L de melhor ajuste dos dados (x_i, y_i) apresentados na Figura 39-2. Temos $n = 7$ e, usando a linha das somas daquela tabela obtemos as equações normais

$$7a + 300b = 35{,}9$$

$$300a + 13.218b = 1431{,}8$$

Substituindo em 39.40, resulta

$$b = \frac{7(1431{,}8) - (300)(35{,}9)}{7(13.218) - (300)^2} = -0{,}2959$$

$$a = \frac{35{,}9}{7} - (-0{,}2959)\frac{300}{7} = 17{,}8100$$

Assim, a reta L de melhor ajuste é

$$y = 17{,}8100 - 0{,}2959x$$

O gráfico de L aparece na Figura 39-3.

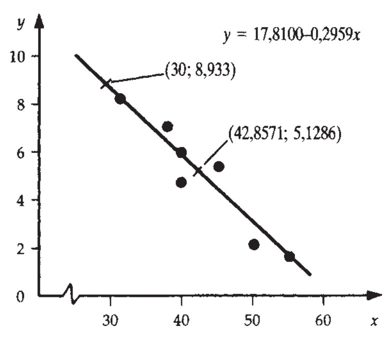


Fig. 39-3

Ajuste de curvas

Suponha que são dados n dados pontuais $P_i\ (x_i,\ y_i)$ e que estes dados (usando um diagrama de dispersão ou o coeficiente de correlação r) indicam que não há uma relação linear entre as variáveis x e y, mas que há algum outro tipo padrão (bem conhecido) de curva $y = f(x)$ que aproxima os dados. Então a particular curva C que utilizamos para aproximar estes dados, denominada *curva de melhor ajuste* ou *curva dos mínimos quadrados*, é a curva da coleção que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos

$$\Sigma\, d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$$

onde agora os resíduos são dados por $d_i = y_i - f(x_i)$. A seguir discutimos três destes tipos de curvas.

Funções polinomiais de grau m: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ do polinômio de melhor ajuste podem ser obtidos resolvendo o seguinte sistema de $m + 1$ equações normais:

39.41
$$\begin{gathered} na_0 + a_1 \Sigma x_i + a_2\, \Sigma x_i^2 + \cdots + a_m\, \Sigma x_i^m = \Sigma\, y_i \\ a_0 \Sigma x_i + a_1\, \Sigma x_i^2 + a_2\, \Sigma x_i^3 + \cdots + a_m\, \Sigma x_i^{m+1} = \Sigma\, x_i y_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 \Sigma x_i^m + a_1\, \Sigma x_i^{m+1} + a_2\, \Sigma x_i^{m+2} + \cdots + a_m\, \Sigma x_i^{2m} = \Sigma\, x_i^m y_i \end{gathered}$$

Curva exponencial: $y = ab^x$ ou $\log y = \log a + (\log b)x$

A curva exponencial é utilizada quando o diagrama de dispersão de log y por x indica uma relação linear. Então log a e log b são obtidos a partir dos dados pontuais transformados. Mais precisamente, a reta de melhor ajuste L para os dados pontuais $P'(x_i, \log y_i)$ é

39.42
$$\begin{cases} na' + (\Sigma\, x_i)\, b' = \Sigma\, (\log y_i) \\ (\Sigma\, x_i)\, a' + (\Sigma\, x_i^2)\, b' = \Sigma\, (x_i \log y_i) \end{cases}$$

Então a = antilog a', b = antilog b'.

Exemplo Considere os seguintes dados que indicam crescimento exponencial.

x	1	2	3	4	5	6
y	6	18	55	160	485	1460

Portanto procuramos a reta dos mínimos quadrados L dos dados seguintes.

x	1	2	3	4	5	6
log y	0,7782	1,2553	1,7404	2,2041	2,6857	3,1644

Usando a Equação 39.42 para L, obtemos

$$a' = 0{,}3028, \quad b' = 0{,}4767$$

Os antilogaritmos comuns de a' e b' são, aproximadamente,

$$a = 2{,}0, \qquad b = 3{,}0$$

Portanto $y = 2(3^x)$ é a curva exponencial C solicitada. Os dados pontuais e C estão ilustrados na Figura 39-4.

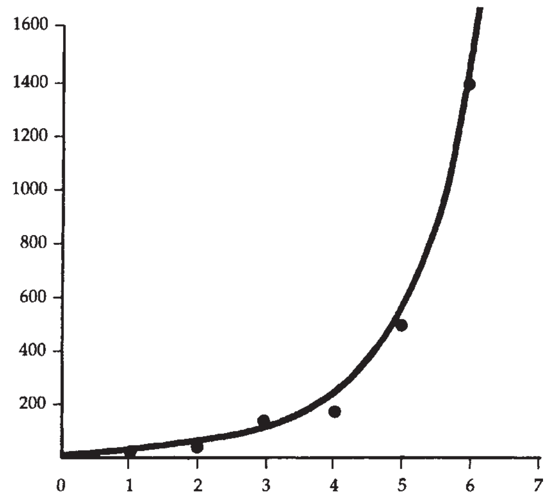


Fig. 39-4

Função potência: $y = ax^b$ ou $\log y = \log a + b \log x$

A curva potência é utilizada quando o diagrama de dispersão de log y por log x indica uma relação linear. Então log a e b são obtidos a partir dos dados pontuais transformados. Mais precisamente, a reta de melhor ajuste L para os dados pontuais $P'(\log x_i, \log y_i)$ é

39.43 $$\begin{cases} na' + \Sigma(\log x_i)b = \Sigma(\log y_i) \\ \Sigma(\log x_i)a' + \Sigma(\log x_i)^2 b = \Sigma(\log x_i \log y_i) \end{cases}$$

Então $a = \text{antilog } a'$.

Probabilidade

40

Espaços amostrais e eventos

Seja S um espaço amostral que consiste nos possíveis resultados de um experimento em que os eventos são subconjuntos de S. O próprio espaço amostral S é denominado *evento certo* e o conjunto vazio Ø é o *evento impossível*.

Seria conveniente que todos os subconjuntos de S fossem eventos. Infelizmente, isso pode levar a contradições quando definirmos uma função probabilidade nos eventos. Assim, os eventos são definidos como uma coleção reduzida C de subconjuntos de S, como segue.

Definição A classe C dos eventos de um espaço amostral S é uma σ-álgebra. Isso significa que C tem as três propriedades seguintes.

(i) $S \in C$.
(ii) Se $A_1, A_2, \ldots$ pertencerem a C, então a união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ pertence a C.
(iii) Se $A \in C$, então o complementar $A^c \in C$.

Embora essa definição não mencione interseções, a lei de De Morgan (40.3) nos diz que o complementar de uma união é a interseção dos complementares. Assim, os eventos formam uma coleção que é fechada nas uniões, interseções e complementares de sequências enumeráveis.

Se S for finito, então a classe de todos subconjuntos de S constitui a σ-álgebra mais natural. Contudo, se S for não enumerável, então somente certos subconjuntos de S podem ser eventos. De fato, se B é a coleção de todos intervalos abertos da reta real **R**, então a menor σ-álgebra que contém B é a coleção dos conjuntos borelianos de **R**.

Se na condição (ii) da definição de σ-álgebra permitirmos somente uniões finitas, então a classe de subconjuntos de S é denominada *álgebra*. Assim, uma σ-álgebra é uma álgebra, mas não vice-versa.

Inicialmente, para começar, listamos as propriedades básicas das operações de união, interseção e complementar de conjuntos.

40.1 Os conjuntos satisfazem as propriedades da Tabela 40-1.

Tabela 40-1 Leis da álgebra de subconjuntos de um conjunto U

Idempotência	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Associatividade	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Comutatividade	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributividade	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
Identidade	(5a) $A \cup \varnothing = A$ (6a) $A \cup U = U$	(5b) $A \cap U = A$ (6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Involução	(7) $(A^C)^C = A$	
Complemento	(8a) $A \cup A^c = U$ (9a) $U^c = \varnothing$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$ (9b) $\varnothing^c = U$
De Morgan	(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

40.2 São equivalentes as afirmações: (i) $A \subseteq B$, (ii) $A \cap B = A$, (iii) $A \cap B = B$.
Lembramos que a união e interseção de coleções quaisquer de conjuntos são definidas por

$\bigcup_j A_j = \{ x \mid \text{existe algum } j \text{ tal que } x \in A_j \}$ e $\bigcap_j A_j = \{ x \mid \text{para cada } j \text{ vale } x \in A_j \}$

40.3 (Lei de De Morgan generalizada) (10a)' $(\bigcup_j A_j)^c = \bigcap_j A_j^c$; (10b)' $(\bigcap_j A_j)^c = \bigcup_j A_j^c$

Espaços de probabilidade e funções probabilidade

Definição Seja P uma função real definida na classe C de eventos de um espaço amostral S. Dizemos que P é uma *função probabilidade*, e que $P(A)$ é a *probabilidade* de um evento A, se a função P satisfizer os seguintes axiomas.

Axioma $\mathbf{P_1}$ Para cada evento A, temos $P(A) \geqq 0$.
Axioma $\mathbf{P_2}$ Para o evento certo S, temos $P(S) = 1$.
Axioma $\mathbf{P_3}$ Para qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos mutuamente exclusivos (ou seja, disjuntos), temos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

O terno (S, C, P) ou, simplesmente, S quando C e P estiverem subentendidos, é denominado *espaço de probabilidade*.
O axioma P_3 implica um axioma análogo para um número finito de conjuntos, a saber,
Axioma $\mathbf{P_3}$' Para qualquer coleção finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de eventos mutuamente exclusivos, temos

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Em particular, dados dois eventos disjuntos A e B, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
As propriedades seguintes decorrem diretamente dos axiomas.

40.4 (Regra do complemento) $P(A^c) = 1 - P(A)$. Assim, $P(\varnothing) = 0$.

40.5 (Regra da diferença) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

40.6 (Regra da soma) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

40.7 Para $n \geqq 2$, temos $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leqq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$.

40.8 (Regra da monotonicidade) Se $A \subseteq B$, então $P(A) \leqq P(B)$.

Limites de sequências de eventos

40.9 (Continuidade) Suponha que $A_1, A_2, \ldots$ forme uma sequência monótona crescente (decrescente) de eventos, ou seja, que $A_j \subseteq A_{j+1}$ $(A_j \supseteq A_{j+1})$. Seja $A = \cup_j A_j$ $(A = \cap_j A_j)$. Então existe $P(A_n)$ e

$$\lim P(A_n) = P(A)$$

Dada qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos, definimos

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{j=k}^{+\infty} A_j \qquad \text{e} \qquad \limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{j=k}^{+\infty} A_j$$

Se $\liminf A_n = \limsup A_n$, denotamos esse conjunto por $\lim A_n$. Observe que A_n sempre existe se a sequência for monótona.

40.10 Dada qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos num espaço de probabilidade, temos

$$P(\liminf A_n) \leqq \liminf P(A_n) \leqq \limsup P(A_n) \leqq P(\limsup A_n)$$

Assim, se existir A_n, então $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$.

40.11 Dada qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots$ de eventos num espaço de probabilidade, $P(\cup_j A_j) \leqq \sum_j P(A_j)$.

40.12 (Lema de Borel-Cantelli) Seja $A_1, A_2, \ldots$ uma sequência de eventos num espaço de probabilidade tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. Então $P(\limsup A_n) = 0$.

40.13 (Teorema da Extensão) Seja F uma álgebra de subconjuntos de S. Seja P uma função de F satisfazendo os axiomas $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_3'}$. Então existe uma única função de probabilidade P^* na menor σ-álgebra contendo F tal que P^* é igual a P em F.

Probabilidade condicional

Definição Seja E um evento com $P(E) > 0$. A probabilidade condicional de um evento A dado E é denotada e definida por

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

40.14 (Teorema da Multiplicação de Probabilidades Condicionais) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Esse teorema pode ser generalizado, como segue.

40.15 $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Exemplo Um lote contém 12 itens, dos quais 4 são defeituosos. Tirando, aleatoriamente, três itens desse lote, um depois do outro, determine a probabilidade de tirar três itens não defeituosos.

A probabilidade de o primeiro item ser não defeituoso é de 8/12. Supondo que o primeiro item retirado seja não defeituoso, a probabilidade de o segundo item ser não defeituoso é de 7/12. Supondo que o primeiro e o segundo itens retirados sejam não defeituosos, a probabilidade de o terceiro item ser não defeituoso é de 6/12. Assim,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

Processos estocásticos e diagramas probabilísticos em árvore

Um processo estocástico (finito) é uma sequência finita de experimentos em que cada experimento tem um número finito de possíveis resultados, cada um com sua probabilidade. Uma maneira conveniente de descrever tais processos é por meio de diagramas probabilísticos em árvore, exemplificados a seguir. No exemplo, utilizamos o teorema da multiplicação (40.14) para calcular a probabilidade de um evento representado por um dado caminho pelo diagrama.

Exemplo Sejam X, Y e Z três moedas numa caixa, sendo X uma moeda equilibrada, Y uma moeda com duas caras e Z uma moeda tal que a probabilidade de dar cara é de 1/3. Selecionamos aleatoriamente uma moeda e a jogamos. (a) Encontre a probabilidade de dar cara. (b) Encontre a probabilidade $P(X|K)$ de ter selecionado a moeda X se tiver dado cara (denotada por K).

O diagrama probabilístico em árvore correspondente a esse processo estocástico de dois passos é dado na Fig. 40-1(a).

(a) Cara aparece em três dos caminhos (da esquerda para a direita), de modo que

$$P(K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

(b) X e K aparecem somente no caminho mais ao alto, de modo que

$$P(X \cap K) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{e, portanto,} \quad P(X|K) = \frac{P(X \cap K)}{P(K)} = \frac{1/6}{11/18} = \frac{3}{11}$$

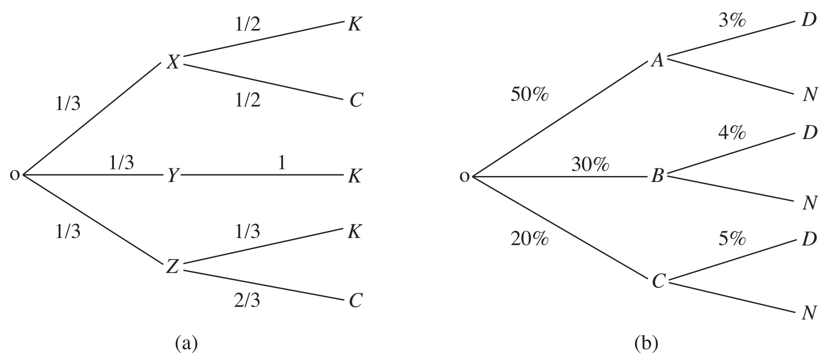


Fig. 40-1

Lei da probabilidade total e o teorema de Bayes

Agora supomos que E é um evento de um espaço amostral S e que $A_1, A_2, ..., A_n$ são eventos mutuamente disjuntos cuja união é S; ou seja, os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição de S.

40.16 (Lei da Probabilidade Total) $P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) + \cdots + P(A_n)P(E|A_n)$

40.17 (Fórmula de Bayes) Para $k = 1, 2, ..., n$, temos

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{P(E)} = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{P(A_1)P(E \mid A_1) + P(A_2)P(E \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(E \mid A_n)}$$

Exemplo As três máquinas A, B e C produzem, respectivamente, 50%, 30% e 20% do número total de itens fabricados por uma indústria. As percentagens de itens defeituosos (indicados por D) dessas máquinas são, respectivamente, 3%, 4% e 5%. Selecionamos um item aleatoriamente.

(a) Encontre a probabilidade $P(D)$ de selecionar um item defeituoso.

(b) Se o item selecionado for defeituoso, encontre a probabilidade de ter selecionado um item produzido por (i) A, (ii) B, (iii) C.

(a) Pela lei da probabilidade total (40.16), temos

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= (0{,}50)(0{,}03) + (0{,}30)(0{,}04) + (0{,}20)(0{,}05) = 3{,}7\% \end{aligned}$$

(b) Pela fórmula de Bayes (40.17), temos (i) $P(A|D) = \dfrac{P(A)P(D \mid A)}{P(D)} = \dfrac{(0{,}50)(0{,}03)}{0{,}037} = 40{,}5\%$.

Analogamente, (ii) $P(B|D) = \dfrac{P(B)P(D \mid B)}{P(D)} = 32{,}5\%$ e (iii) $P(C|D) = \dfrac{P(C)P(D \mid C)}{P(D)} = 27{,}0\%$.

Alternativamente, podemos considerar esse problema como um processo estocástico de dois passos com um diagrama probabilístico em árvore, como na Fig. 40-1(b). Encontramos $P(D)$ somando os três caminhos probabilísticos até D, isto é,

$$(0{,}50)(0{,}03) + (0{,}30)(0{,}04) + (0{,}20)(0{,}05) = 3{,}7\%$$

Encontramos $P(A|D)$ dividindo o caminho mais ao alto de A a D pela soma dos três caminhos até D, ou seja,

$$(0{,}50)(0{,}03)/0{,}037 = 40{,}5\%$$

Finalmente, encontramos $P(B|D) = 32{,}5\%$ e $P(C|D) = 27{,}0\%$.

Eventos independentes

Definição Dizemos que os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

40.18 As afirmações seguintes são equivalentes.

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, (ii) $P(A|B) = P(A)$, (iii) $P(B|A) = P(B)$.

Assim, os eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles não influenciar a ocorrência do outro.

Exemplo Considere os seguintes eventos de uma família com crianças, em que vamos supor que o espaço amostral S é um espaço equiprovável:

$$E = \{\text{crianças de ambos sexos}\}, \qquad F = \{\text{no máximo um menino}\}$$

(a) Mostre que E e F são eventos independentes se a família tiver três crianças.
(b) Mostre que E e F são eventos dependentes se a família tiver duas crianças.

Vamos indicar as meninas por f e os meninos por m.

(a) Nesse caso, $S = \{\text{mmm, mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm, fff}\}$ e temos

$$\begin{aligned} E &= \{\text{mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm}\} \text{ com } P(E) = 6/8 = 3/4, \\ F &= \{\text{mff, fmf, ffm, fff}\} \text{ com } P(F) = 4/8 = 1/2 \text{ e} \\ E \cap F &= \{\text{mff, fmf, ffm}\} \text{ com } P(E \cap F) = 3/8. \end{aligned}$$

Assim, $P(E)P(F) = (3/4)(1/2) = 3/8 = P(E \cap F)$ e, portanto, E e F são independentes.

(b) Nesse caso, $S = \{\text{mm, mf, fm, ff}\}$ e temos

$$\begin{aligned} E &= \{\text{mf, fm}\} \text{ com } P(E) = 2/4 = 1/2, \\ F &= \{\text{mf, fm, ff}\} \text{ com } P(F) = 3/4 \text{ e} \\ E \cap F &= \{\text{mf, fm}\} \text{ com } P(E \cap F) = 2/4 = 1/2. \end{aligned}$$

Assim, $P(E)P(F) = (1/2)(3/4) = 3/8 \neq P(E \cap F)$ e, portanto, E e F são dependentes.

Definição Com $n > 2$, dizemos que os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se qualquer subconjunto próprio deles for independente e

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Observe que, nessa definição, usamos indução.

Definição Dizemos que uma coleção $\{A_j \mid j \in J\}$ de eventos é independente se, para cada $n > 0$, os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes.

O conceito de escolhas repetidas independentes, no caso de um conjunto amostral S finito, é formalizado como segue.

Definição Seja S um espaço de probabilidade finito. O espaço de probabilidade de n escolhas independentes ou repetidas, denotado por S_n, consiste nas ênuplas ordenadas $(s_1, s_2, ..., s_n)$ de elementos de S com a probabilidade de cada ênupla definida por

$$P((s_1, s_2, \ldots, s_n)) = P(s_1)P(s_2) \ldots P(s_n)$$

Exemplo Suponha que as probabilidades de vitória de três cavalos a, b e c sejam, respectivamente, de 20%, 30% e 50%, sempre que os três correrem juntos. Eles correm três vezes. Encontre a probabilidade de

(a) o mesmo cavalo vencer as três corridas;
(b) cada cavalo ganhar uma corrida.

(a) Denotando o terno (x, y, z) por xyz, queremos encontrar a probabilidade do evento $A = \{\text{aaa, bbb, ccc}\}$. Temos

$$P(\text{aaa}) = (0{,}2)^3 = 0{,}008, \quad P(\text{bbb}) = (0{,}3)^3 = 0{,}027, \quad P(\text{ccc}) = (0{,}5)^3 = 0{,}125$$

Assim, $P(A) = 0{,}008 + 0{,}027 + 0{,}125 = 0{,}160$.

(b) Queremos encontrar a probabilidade do evento $B = \{\text{abc, acb, bac, bca, cab, cba}\}$. Cada elemento de B tem a mesma probabilidade $(0{,}2)(0{,}3)(0{,}5) = 0{,}03$. Assim, $P(B) = 6(0{,}03) = 0{,}18$.

Variáveis Aleatórias

41

Considere um espaço de probabilidade (S, C, P).

Definição Uma variável aleatória X do espaço amostral S é uma função de S no conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ tal que a pré-imagem de cada intervalo de $\mathbf{R}$ é um evento de S.

Se S é um espaço amostral discreto em que cada subconjunto de S é um evento, então qualquer função real definida em S é uma variável aleatória. Por outro lado, se S é não enumerável, então pode haver funções reais de S que não sejam variáveis aleatórias.

Seja X uma variável aleatória de S e denotemos por R_X a imagem de X, ou seja,

$$R_X = \{x \mid \text{existe } s \in S \text{ tal que } X(s) = x\}.$$

Diferenciamos entre dois casos, que tratamos separadamente. (i) X é uma variável aleatória discreta, isto é, R_X é finito ou enumerável. (ii) X é uma variável aleatória contínua, isto é, R_X é um conjunto contínuo de números reais, tal como um intervalo, ou uma união de intervalos.

Sejam X e Y variáveis aleatórias do mesmo espaço amostral S. Então, da mesma forma como ocorre com funções gerais, $X + Y$, $X + k$, kX e XY (onde k é algum número real) são as funções de S definidas, em qualquer ponto s de S, por

$$(X + Y)(s) = X(s) + Y(s), \qquad (kX)(s) = kX(s),$$
$$(X + k)(s) = X(s) + k, \qquad (XY)(s) = X(s)Y(s).$$

Mais geralmente, dada qualquer função contínua $h(t)$, por exemplo, polinomial ou exponencial, definimos $h(X)$ como sendo a função de S dada, em qualquer ponto s de S, por

$$[h(X)](s) = h[X(s)]$$

Pode ser mostrado que essas funções também são variáveis aleatórias de S.

Utilizamos a seguinte notação.

$P(X = x_i)$	denota a probabilidade de $X = x_i$.
$P(a \leqq X \leqq b)$	denota a probabilidade de X estar no intervalo fechado $[a, b]$.
μ_X ou $E(X)$ ou, simplesmente, μ	denota a média ou esperança de X.
σ_X^2 ou $\mathrm{Var}(X)$ ou, simplesmente, σ^2	denota a variância de X.
σ_X ou, simplesmente, σ	denota o desvio padrão de X.

Às vezes, permitimos que Y seja uma variável aleatória tal que $Y = g(X)$, ou seja, que Y seja uma função de X.

Variáveis aleatórias discretas

Aqui vamos supor que X tem somente um número finito ou enumerável de valores, digamos, $R_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, com $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ Então X induz uma função $f(x)$ de R_X, como segue.

$$f(x_i) = P(X = x_i) = P(\{s \in S \mid X(s) = x_i\})$$

A função $f(x)$ tem as seguintes propriedades:

$$\text{(i) } f(x_i) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } \Sigma_i f(x_i) = 1$$

Assim, f define uma função probabilidade no domínio R_X de X. O par $(x_i, f(x_i))$, geralmente dado por meio de uma tabela, é denominado *distribuição de probabilidade de X*.

Média

41.1 $\mu_X = E(X) = \Sigma x_i f(x_i)$

Aqui, $Y = g(X)$.

41.2 $\mu_Y = E(Y) = \Sigma g(x_i) f(x_i)$

Variância e desvio padrão

41.3 $\sigma_X{}^2 = \mathrm{Var}(X) = \Sigma(x_i - \mu)^2 f(x_i) = E((X - \mu)^2)$

Alternativamente, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ pode ser obtida como segue:

41.4 $\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{\Sigma} x_i^2 f(x_i) - \boldsymbol{\mu^2} = E(X^2) - \mu^2$

41.5 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{E(X^2) - \mu^2}$

Observação: A variância $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ e o desvio padrão σ medem a dispersão ponderada dos valores x_i em torno da média μ; no entanto, o desvio padrão tem as mesmas unidades que a média μ.

Exemplo Suponha que X tem a seguinte distribuição de probabilidade.

x	2	4	6	8
$f(x)$	0,1	0,2	0,3	0,4

Então,

$$\mu = E(X) = \Sigma x_i f(x_i) = 2(0{,}1) + 4(0{,}2) + 6(0{,}3) + 8(0{,}4) = 6$$

$$E(X^2) = \Sigma x_i^2 f(x_i) = 2^2(0{,}1) + 4^2(0{,}2) + 6^2(0{,}3) + 8^2(0{,}4) = 40$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 40 - 36 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{4} = 2$$

Variáveis aleatórias contínuas

Aqui vamos supor que X é um contínuo de valores. Então X determina uma função $f(x)$, denominada *função densidade* de X, tal que

$$\text{(i) } f(x) \geqq 0 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 1$$

Além disso,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Média

41.6 $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

Aqui, $Y = g(X)$.

41.7 $\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$

Variância e desvio padrão

41.8 $\sigma_X{}^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = E((X-\mu)^2)$

Alternativamente, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ pode ser obtida por meio de

41.9 $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$

41.10 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{E(X^2)-\mu^2}$

Exemplo Seja X a variável aleatória contínua com a função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)x & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Função distribuição acumulada

A *função distribuição acumulada* $F(X)$ de uma variável aleatória X é a função F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

41.11 $F(a) = P(X \leqq a)$

A função F está bem definida, pois a imagem inversa do intervalo $(-\infty, a]$ é um evento.
A função F tem as propriedades listadas a seguir.

41.12 $F(a) \leqq F(b)$ sempre que $a \leqq b$.

41.13 $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Portanto $F(x)$ é monótona na reta real com limite lateral à esquerda igual a 0 e limite lateral à direita igual a 1.

Se X é uma variável aleatória discreta com distribuição $f(x)$, então $F(X)$ é a função escada

41.14 $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

Se X é uma variável aleatória contínua, então a função densidade $f(x)$ de X pode ser obtida a partir da função distribuição acumulada $F(X)$ por derivação, ou seja,

41.15 $f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$

Assim, para uma variável aleatória contínua X, temos

41.16 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Variável aleatória padronizada

A *variável aleatória padronizada* Z de uma variável aleatória X com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$ é definida por

41.17 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

A variável aleatória padronizada Z tem as seguintes propriedades.

$$\mu_z = E(Z) = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma_z = 1$$

Exemplo Considere a variável aleatória X do exemplo que segue a Fórmula 41.5, onde $\mu_X = 6$ e $\sigma_X = 2$. A distribuição de $Z = (X - 6)/2$, onde $f(z) = f(x)$, é

Z	-2	-1	0	1
$f(Z)$	0,1	0,2	0,3	0,4

Então,

$$E(Z) = \Sigma z_i f(z_i) = (-2)(0{,}1) + (-1)(0{,}2) + 0(0{,}3) + 1(0{,}4) = 0$$
$$E(Z^2) = \Sigma z_i^2 f(z_i) = (-2)^2(0{,}1) + (-1)^2(0{,}2) + 0^2(0{,}3) + 1^2(0{,}4) = 1$$
$$\text{Var}(Z) = 1 - 0^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \sigma_Z = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1$$

Distribuições de probabilidade

41.18 Distribuição binomial: $\Phi(x) = \sum_{t \leq x} \binom{n}{t} p^t q^{n-t} \quad p > 0, q > 0, p + q = 1$

41.19 Distribuição de Poisson: $\Phi(x) = \sum_{t \leq x} \frac{\lambda^t e^{-\lambda}}{t!} \qquad \lambda > 0$

41.20 Distribuição hipergeométrica: $\Phi(x) = \sum_{t \leqq x} z \dfrac{\binom{r}{t}\binom{s}{n-t}}{\binom{r+s}{n}}$

41.21 Distribuição normal: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

41.22 Distribuição T de Student: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt$

41.23 Distribuição χ^2 (Qui-Quadrado): $\Phi(x) = \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^x t^{(n-2)/2} e^{-t/2}\, dt$

41.24 Distribuição F: $\Phi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{n_1/2}\, n_2^{n_2/2}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \int_0^x t^{(n_1/2)-1}(n_2 + n_1 t)^{-(n_1+n_2)/2}\, dt$

42 Interpolação

Interpolação de Lagrange

Fórmula de interpolação de dois pontos

42.1 $p(x) = f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

onde $p(x)$ é um polinômio linear interpolando os dois pontos

$$(x_0,\ f(x_0)),\quad (x_1,\ f(x_1)),\quad x_0 \neq x_1$$

Fórmula geral de interpolação

42.2 $p(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x)$

onde

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0,\, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

e onde $p(x)$ é um polinômio de grau n interpolando os $n + 1$ pontos

$$(x_k, f(x_k)),\quad k = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{e} \qquad x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j$$

Fórmula do resto

Suponha que $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$. Então existe um ponto $\xi(x) \in (a, b)$ tal que

42.3 $f(x) = p(x) + \dfrac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

Interpolação de Newton

Fórmula do quociente de diferenças de primeira ordem

42.4 $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Fórmula de interpolação de dois pontos

42.5 $p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$

onde $p(x)$ é um polinômio linear interpolando os dois pontos

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad x_0 \neq x_1$$

Fórmula do quociente de diferenças de segunda ordem

42.6 $$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Fórmula de interpolação de três pontos

42.7 $$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

onde $p(x)$ é um polinômio quadrático interpolando os três pontos

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_3))$$

Fórmula do quociente de diferenças geral de k-ésima ordem

42.8 $$f[x_0, x_1, \ldots, x_k\} = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Fórmula de interpolação geral

42.9 $$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

onde $p(x)$ é um polinômio de grau n interpolando os $n + 1$ pontos

$$(x_k, f(x_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{e} \qquad x_i \neq x_j \ \text{para} \ i \neq j$$

Fórmula do resto

Suponha que $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$. Então existe um ponto $\xi(x) \in (a, b)$ tal que

42.10 $$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Fórmula de Newton de diferenças para a frente

Diferença para a frente de primeira ordem em x_0

42.11 $$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

Diferença para a frente de segunda ordem em x_0

42.12 $$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$$

Diferença para a frente de k-ésima ordem em x_0

42.13 $$\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_1) - \Delta^{k-1} f(x_0)$$

Coeficiente binomial

42.14 $$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

Fórmula de Newton de diferenças para a frente em x_0

42.15 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x_0)$

onde $p(x)$ é um polinômio de grau n interpolando os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$(x_k, f(x_k)),\ x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Fórmula de Newton de diferenças para trás

Diferença para trás de primeira ordem em x_n

42.16 $\nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1})$

Diferença para trás de segunda ordem em x_n

42.17 $\nabla^2 f(x_n) = \nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n-1})$

Diferença para trás de k-ésima ordem em x_n

42.18 $\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x_{n-1})$

Fórmula de Newton de diferenças para trás em x_0

42.19 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-n}{k} \nabla^k f(x_n)$

onde $p(x)$ é um polinômio de grau n interpolando os $n + 1$ pontos igualmente espaçados

$$(x_k, f(x_k)),\ x_k = x_0 + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Interpolação de Hermite

Base de polinômios para dois pontos

42.20 $H_{1,0} = \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \quad H_{1,1} = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$

$$\hat{H}_{1,0} = (x - x_0)\frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \quad \hat{H}_{1,1} = (x - x_1)\frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

Fórmula de interpolação de dois pontos

42.21 $H_3(x) = f(x_0)H_{1,0} + f(x_1)H_{1,1} + f'(x_0)\hat{H}_{1,0} + f'(x_1)\hat{H}_{1,1}$

onde $H_3(x)$ é um polinômio de grau três que tem o mesmo valor e as mesmas derivadas primeiras que $f(x)$ em dois pontos, ou seja,

$$H_3(x_0) = f(x_0), \quad H_3'(x_0) = f'(x_0), \qquad H_3(x_1) = f(x_1), \quad H_3'(x_1) = f'(x_1)$$

Base de polinômios geral

42.22 $H_{n,j} = \left(1 - 2\dfrac{x - x_j}{L'_{n,j}(x_j)}\right) L^2_{n,j}(x), \quad \hat{H}_{n,j} = (x - x_j)\, L^2_{n,j}(x)$

onde

$$L_{n,j}(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Fórmula de interpolação geral

42.23 $H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$

onde $H_{2n+1}(x)$ é um polinômio de grau $2n + 1$ que tem o mesmo valor e as mesmas derivadas primeiras que $f(x)$ em $n + 1$ pontos, ou seja,

$$H_{2n+1}(x_k) = f(x_k),\ H'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Fórmula do resto

Suponha que $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$. Então existe um ponto $\xi(x) \in (a, b)$ tal que

42.24 $f(x) = H_{2n+1}(x) + \dfrac{f^{2n+2}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$

43 Quadratura

Regra do trapézio

Regra do trapézio

43.1 $\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

Regra do trapézio composta

43.2 $\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)\right)$

onde $h = (b-a)/n$ é o tamanho do passo.

Regra de Simpson

Regra de Simpson

43.3 $\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

Regra de Simpson composta

43.4 $\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}\left(f(x_0)+2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2})+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+f(x_n)\right)$

onde n é par, $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., n$.

Regra do ponto médio

Regra do ponto médio

43.5 $\int_a^b f(x)\,dx \sim (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Regra do ponto médio composta

43.6 $\int_a^b f(x)\,dx \sim 2h\sum_{i=0}^{n/2} f(x_{2i})$

onde n é par, $h = (b-a)/(n+2)$, $x_i = a+(i-1)h$, $i = -1, 0, \ldots, n+1$.

Fórmula da quadratura gaussiana

Polinômio de Legendre

43.7 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$

Fórmulas dos pontos de abscissa e dos pesos

Os pontos de abscissa $x_k^{(n)}$ e os coeficientes do peso $\omega_k^{(n)}$ são definidos como segue.

43.8 $x_k^{(n)}$ = o k-ésimo zero do polinômio de Legendre $P_n(x)$

43.9 $\omega_k^{(n)} = \dfrac{2P_n'(x_k^{(n)})^2}{1-x_k^{(n)^2}}$

Na Figura 43-1 apresentamos uma tabela de valores para as abscissas e os pesos de Gauss-Legendre.

Fórmula de Gauss-Legendre no intervalo (*–1, 1*)

43.10 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n$

Fórmula de Gauss-Legendre num intervalo (a, b) *qualquer*

43.11 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} f\left(\frac{a+b}{2} + x_k^{(n)}\,\frac{b-a}{2}\right) + R_n$

Fórmula do resto

43.12 $R_n = \dfrac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi)$

para algum $a < \xi < b$.

n	$x_k^{(n)}$	$\omega_k^{(n)}$
2	0,5773502692	1,0000000000
	−0,5773502692	1,0000000000
3	0,7745966692	0,5555555556
	0,0000000000	0,8888888889
	−0,7745966692	0,5555555556
4	0,8611363116	0,3478548451
	0,3399810436	0,6521451549
	−0,3399810436	0,6521451549
	−0,8611363116	0,3478548451
5	0,9061798459	0,2369268850
	0,5384693101	0,4786286705
	−0,0000000000	0,5688888889
	−0,5384693101	0,4786286705
	−0,9061798459	0,2369268850

Fig. 43-1

44 Solução de Equações Não Lineares

Aqui apresentamos métodos de resolver equações não lineares, que aparecem de duas maneiras:

44.1 Equação não linear: $f(x) = 0$

44.2 Equação não linear de ponto fixo: $x = g(x)$

Podemos alternar de 44.1 para 44.2 ou de 44.2 para 44.1 tomando

$$g(x) = f(x) + x \quad \text{ou} \quad f(x) = g(x) - x$$

Como os métodos são iterativos, existem dois tipos de estimativa de erro.

44.3 $|f(x_n)| < \epsilon \quad \text{ou} \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

para algum $\epsilon > 0$ predeterminado.

Método da bisseção

Utilizamos o seguinte teorema.

Teorema do valor intermediário Suponha que f é contínua num intervalo $[a, b]$ e que $f(a)f(b) < 0$. Então existe uma raiz x^* de $f(x) = 0$ em (a, b).

O método de bisseção aproxima uma tal solução x^*.

44.4 Método de bisseção:
Passo inicial: Tome $a_0 = a$ e $b_0 = b$.
Passo de iteração:

(a) Tome $c_n = (a_n + b_n)/2$.
(b) Se $f(a_n) f(c_n) < 0$, tome $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$; caso contrário, tome $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

Método de Newton

Método de Newton

44.5 $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergência quadrática

44.6 $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{f''(x^*)}{2(f'(x^*))^2}$$

onde x^* é uma raiz da equação não linear 44.1.

Método da secante

Método da secante

44.7 $$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Taxa de convergência

44.8 $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*||x_{n-1} - x^*|} = \frac{f''(x^*)}{2(f'(x^*))^2}$$

onde x^* é uma raiz da equação não linear 44.1.

Ponto fixo por iteração

Utilizamos a definição e o teorema a seguir:

Definição Dizemos que uma função g de $[a, b]$ em $[a, b]$ é uma *contração* se

$$|g(x) - g(y)| \leqq L|x - y| \quad \text{para quaisquer } x,\ y \in (a, b)$$

onde $L < 1$ é uma constante positiva.

Teorema do ponto fixo de contrações Suponha que g é uma contração de $[a, b]$. Então g tem um único ponto fixo em $[a, b]$.

Dada uma tal contração g, podemos utilizar o método a seguir.

Ponto fixo por iteração

44.9 $$x_{n+1} = g(x_n)$$

45 Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias

Aqui apresentamos métodos de resolver o seguinte problema de valor inicial de uma equação diferencial ordinária:

45.1 $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Os métodos apresentados utilizam uma malha computacional

45.2 $$t_n = t_0 + nh$$

onde o passo h da malha é uniforme.

Métodos de primeira ordem

Método de Euler para a frente (*método explícito de primeira ordem*)

45.3 $$x(t+h) = x(t) + hf(x(t),\ t)$$

Método de Euler para trás (*método implícito de primeira ordem*)

45.4 $$x(t+h) = x(t) + hf(x(t+h),\ t+h)$$

Métodos de segunda ordem

Regra do ponto médio (*método explícito de segunda ordem*)

45.5 $$\begin{cases} x^* = x(t) + \dfrac{h}{2} f(x(t),\ t) \\ x(t+h) = x(t) + hf\left(x^*,\ t + \dfrac{h}{2}\right) \end{cases}$$

Regra trapezoidal (*método implícito de segunda ordem*)

45.6 $$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}\{f(x(t),\ t) + f(x(t+h),\ t+h)\}$$

Método de Heun (*método explícito de segunda ordem*)

45.7 $$\begin{cases} x^* = x(t) + hf(x(t),\ t) \\ x(t+h) = x(t) + \dfrac{h}{2}\{f(x(t),\ t) + f(x^*,\ t+h)\} \end{cases}$$

Método de estágio único de ordem superior

Método de Runge-Kutta de quarta ordem (*método explícito de quarta ordem*)

45.8 $$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$$

onde

$$F_1 = hf(x,\ t), \quad F_2 = hf\left(x + \frac{F_1}{2},\ t + \frac{h}{2}\right), \quad F_3 = hf\left(x + \frac{F_2}{2},\ t + \frac{h}{2}\right), \quad F_4 = hf(x + F_3,\ t + h)$$

Métodos de passos múltiplos de ordem superior

Método de Adams-Bashforth de dois passos

45.9 $$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{3}{2}f(x(t),\ t) - \frac{1}{2}f(x(t-h),\ t-h)\right)$$

Método de Adams-Bashforth de três passos

45.10 $$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{23}{12}f(x(t),\ t) - \frac{4}{3}f(x(t-h),\ t-h) + \frac{5}{12}f(x(t-2h),\ t-2h)\right)$$

Método de Adams-Bashforth de quatro passos

45.11 $$x(t+h) = x(t)+h\left(\frac{55}{24}f(x(t),t)-\frac{59}{24}f(x(t-h),t-h)+\frac{37}{24}f(x(t-2h),t-2h)-\frac{9}{24}f(x(t-3h),t-3h)\right)$$

Método de Milne

45.12 $$x(t+h) = x(t-3h) + h\left(\frac{8}{3}f(x(t),\ t) - \frac{4}{3}f(x(t-h),\ t-h) + \frac{8}{3}f(x(t-2h),\ t-2h)\right)$$

Método de Adams-Moulton de dois passos

45.13 $$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{5}{12}f(x(t+h),\ t+h) + \frac{2}{3}f(x(t),\ t) - \frac{1}{12}f(x(t-h),\ t-h)\right)$$

Método de Adams-Moulton de três passos

45.14

$$x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{3}{8}f(x(t+h), t+h) + \frac{19}{24}f(x(t), t) - \frac{5}{24}f(x(t-h), t-h) + \frac{1}{24}f(x(t-2h), t-3h)\right)$$

46 Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais

Método de diferenças finitas para a equação de Poisson

A equação de Poisson no domínio $(a, b) \times (c, d)$ é dada por

46.1 $\nabla^2 u = f, \quad \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Condição de fronteira:

46.2 $u(x, y) = g(x, y) \qquad \text{para } x = a, b \qquad \text{ou} \qquad y = c, d$

Malha computacional:

46.3 $x_i = a + i\Delta x \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$

$y_j = c + j\Delta y \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, m$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $\Delta y = (d - c)/m$ são os tamanhos dos passos para as variáveis x e y, respectivamente.

Aproximação de diferenças finitas de segunda ordem

46.4 $(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$

onde

$$D_x^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x^2}$$

$$D_y^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta y^2}$$

Condição de fronteira computacional

46.5 $u(x_0, y_j) = g(a, y_j), \qquad u(x_n, y_j) = g(b, y_j) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m$

$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), \qquad u(x_i, y_m) = g(x_i, d) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$

Método de diferenças finitas para a equação do calor

A equação do calor no domínio $(a, b) \times (c, d) \times (0, T)$ é dada por

46.6 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$

Condição de fronteira:

46.7 $u(x, y, t) = g(x, y) \qquad \text{para } x = a, b \qquad \text{ou} \qquad y = c, d$

Condição inicial:

46.8 $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Malha computacional:

46.9 $x_i = a + i\Delta x \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$

$y_j = c + j\Delta y \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, m$

$t_k = k\Delta t \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$

onde $\Delta x = (b - a)/n$, $\Delta y = (d - c)/m$ e Δt são os tamanhos dos passos para as variáveis x, y e t, respectivamente.

Condição de fronteira computacional

46.10 $u(x_0, y_j) = g(a, y_j), \qquad u(x_n, y_j) = g(b, y_j) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m$

$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), \qquad u(x_i, y_m) = g(x_i, d) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$

Condição inicial computacional

46.11 $u(x_i, y_j, 0) = u_0(x_i, y_j) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m$

Método de Euler para a frente com condição de estabilidade

46.12 $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j, t_k)$

46.13 $\dfrac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \dfrac{2\Delta t}{\Delta y^2} \leq 1$

Método de Euler para trás sem condição de estabilidade

46.14 $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j, t_{k+1})$

Método de Crank-Nicholson (*sem condição de estabilidade*)

46.15 $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)\{u(x_i, y_j, t_k) + u(x_i, y_j, t_{k+1})\}/2$

Método de diferenças finitas para a equação da onda

A equação da onda no domínio $(a, b) \times (c, d) \times (0, T)$ é dada por

46.16 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2 \nabla^2 u$

onde A é uma constante representando a velocidade da onda.

Condição de fronteira:

46.17 $u(x, y, t) = g(x, y) \qquad \text{para } x = a, b \quad \text{ou} \quad y = c, d$

Condição inicial:

46.18 $u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} u(x, y, 0) = u_1(x, y)$

Malha computacional:

46.19 $x_i = a + i\Delta x \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$

$y_j = c + j\Delta y \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, m$

$t_k = k\Delta t \qquad \text{para } k = -1, 0, 1, \ldots$

onde $\Delta x = (b - a)/n$, $\Delta y = (d - c)/m$ e Δt são os tamanhos dos passos para as variáveis x, y e t, respectivamente.

Aproximação de diferenças finitas de segunda ordem

46.20 $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = 2u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k-1}) + \Delta t^2 A^2 (D_x^2 + D_y^2) u(x_i, y_j, t_k)$

Condição de fronteira computacional

46.21 $u(x_0, y_j) = g(a, y_j), \qquad u(x_n, y_j) = g(b, y_j) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m$

$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), \qquad u(x_i, y_m) = g(x_i, d) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$

Condição inicial computacional

46.22 $u(x_i, y_j, t_0) = u_0(x_i, y_j) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m$

$u(x_i, y_j, t_{-1}) = u_0(x_i, y_j) + \Delta t^2 u_1(x_i, y_j) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m$

Condição de estabilidade

46.23 $\Delta t \leq A \min(\Delta x, \Delta x)$

Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

47

Método iterativo para a equação de Poisson

A aproximação de diferenças finitas para a equação de Poisson é dada por

47.1 $$\begin{cases} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = f_{i,j} & \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ u_{0,j} = u_{n,j} = 0 & \text{para } j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ u_{i,0} = u_{i,n} = 0 & \text{para } i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Três métodos iterativos para resolver o sistema são os seguintes.

Método de Jacobi

47.2 $$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - f_{i,j})$$

Método de Gauss-Seidel

47.3 $$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1} - f_{i,j})$$

Método de sobrerrelaxações sucessivas (*SOR*)

47.4 $$\begin{cases} u_{i,j}^{*} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{*} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{*} - f_{i,j}) \\ u_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)u_{i,j}^{k} + \omega u_{i,j}^{*} \end{cases}$$

Método iterativo para sistemas lineares gerais

Considere o sistema linear

47.5 $Ax = b$

onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $n \times n$ e $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores n-dimensionais. Vamos supor que a matriz de coeficientes está particionada como segue:

47.6 $A = D - L - U$

onde $\boldsymbol{D} = \text{diag}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{L}$ é o negativo da parte triangular estritamente inferior de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{U}$ é o negativo da parte triangular estritamente superior de $\boldsymbol{A}$.

Quatro métodos iterativos para resolver o sistema são os seguintes.

Método de Richardson

47.7 $x^{k+1} = (I - A)x^k + b$

Método de Jacobi

47.8 $Dx^{k+1} = (L + U)x^k + b$

Método de Gauss-Seidel

47.9 $(D - L)x^{k+1} = Ux^k + b$

Método de sobrerrelaxações sucessivas (*SOR*)

47.10 $(D - \omega L)x^{k+1} = \omega(Ux^k + b) + (1 - \omega)Dx^k$

Parte B

TABELAS

1 Logaritmos Comuns

$\log_{10} N$ ou $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionais								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionais								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

sen x (x em graus e minutos) 2

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843
5°	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708
10°	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560
15°	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393
20°	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200
25°	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975
30°	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712
35°	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406
40°	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050
45°	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642
50°	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175
55°	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646
60°	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051
65°	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387
70°	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652
75°	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843
80°	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9936	0,9939	0,9942
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959
85°	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
90°	1,0000					

3

cos x (x em graus e minutos)

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
1	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995
2	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990	0,9989	0,9988
3	0,9986	0,9985	0,9983	0,9981	0,9980	0,9978
4	0,9976	0,9974	0,9971	0,9969	0,9967	0,9964
5°	0,9962	0,9959	0,9957	0,9954	0,9951	0,9948
6	0,9945	0,9942	0,9939	0,9936	0,9932	0,9929
7	0,9925	0,9922	0,9918	0,9914	0,9911	0,9907
8	0,9903	0,9899	0,9894	0,9890	0,9886	0,9881
9	0,9877	0,9872	0,9868	0,9863	0,9858	0,9853
10°	0,9848	0,9843	0,9838	0,9833	0,9827	0,9822
11	0,9816	0,9811	0,9805	0,9799	0,9793	0,9787
12	0,9781	0,9775	0,9769	0,9763	0,9757	0,9750
13	0,9744	0,9737	0,9730	0,9724	0,9717	0,9710
14	0,9703	0,9696	0,9689	0,9681	0,9674	0,9667
15°	0,9659	0,9652	0,9644	0,9636	0,9628	0,9621
16	0,9613	0,9605	0,9596	0,9588	0,9580	0,9572
17	0,9563	0,9555	0,9546	0,9537	0,9528	0,9520
18	0,9511	0,9502	0,9492	0,9483	0,9474	0,9465
19	0,9455	0,9446	0,9436	0,9426	0,9417	0,9407
20°	0,9397	0,9387	0,9377	0,9367	0,9356	0,9346
21	0,9336	0,9325	0,9315	0,9304	0,9293	0,9283
22	0,9272	0,9261	0,9250	0,9239	0,9228	0,9216
23	0,9205	0,9194	0,9182	0,9171	0,9159	0,9147
24	0,9135	0,9124	0,9112	0,9100	0,9088	0,9075
25°	0,9063	0,9051	0,9038	0,9026	0,9013	0,9001
26	0,8988	0,8975	0,8962	0,8949	0,8936	0,8923
27	0,8910	0,8897	0,8884	0,8870	0,8857	0,8843
28	0,8829	0,8816	0,8802	0,8788	0,8774	0,8760
29	0,8746	0,8732	0,8718	0,8704	0,8689	0,8675
30°	0,8660	0,8646	0,8631	0,8616	0,8601	0,8587
31	0,8572	0,8557	0,8542	0,8526	0,8511	0,8496
32	0,8480	0,8465	0,8450	0,8434	0,8418	0,8403
33	0,8387	0,8371	0,8355	0,8339	0,8323	0,8307
34	0,8290	0,8274	0,8258	0,8241	0,8225	0,8208
35°	0,8192	0,8175	0,8158	0,8141	0,8124	0,8107
36	0,8090	0,8073	0,8056	0,8039	0,8021	0,8004
37	0,7986	0,7969	0,7951	0,7934	0,7916	0,7898
38	0,7880	0,7862	0,7844	0,7826	0,7808	0,7790
39	0,7771	0,7753	0,7735	0,7716	0,7698	0,7679
40°	0,7660	0,7642	0,7623	0,7604	0,7585	0,7566
41	0,7547	0,7528	0,7509	0,7490	0,7470	0,7451
42	0,7431	0,7412	0,7392	0,7373	0,7353	0,7333
43	0,7314	0,7294	0,7274	0,7254	0,7234	0,7214
44	0,7193	0,7173	0,7153	0,7133	0,7112	0,7092
45°	0,7071	0,7050	0,7030	0,7009	0,6988	0,6967

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	0,7071	0,7050	0,7030	0,7009	0,6988	0,6967
46	0,6947	0,6926	0,6905	0,6884	0,6862	0,6841
47	0,6820	0,6799	0,6777	0,6756	0,6734	0,6713
48	0,6691	0,6670	0,6648	0,6626	0,6604	0,6583
49	0,6561	0,6539	0,6517	0,6494	0,6472	0,6450
50°	0,6428	0,6406	0,6383	0,6361	0,6338	0,6316
51	0,6293	0,6271	0,6248	0,6225	0,6202	0,6180
52	0,6157	0,6134	0,6111	0,6088	0,6065	0,6041
53	0,6018	0,5995	0,5972	0,5948	0,5925	0,5901
54	0,5878	0,5854	0,5831	0,5807	0,5783	0,5760
55°	0,5736	0,5712	0,5688	0,5664	0,5640	0,5616
56	0,5592	0,5568	0,5544	0,5519	0,5495	0,5471
57	0,5446	0,5422	0,5398	0,5373	0,5348	0,5324
58	0,5299	0,5275	0,5250	0,5225	0,5200	0,5175
59	0,5150	0,5125	0,5100	0,5075	0,5050	0,5025
60°	0,5000	0,4975	0,4950	0,4924	0,4899	0,4874
61	0,4848	0,4823	0,4797	0,4772	0,4746	0,4720
62	0,4695	0,4669	0,4643	0,4617	0,4592	0,4566
63	0,4540	0,4514	0,4488	0,4462	0,4436	0,4410
64	0,4384	0,4358	0,4331	0,4305	0,4279	0,4253
65°	0,4226	0,4200	0,4173	0,4147	0,4120	0,4094
66	0,4067	0,4041	0,4014	0,3987	0,3961	0,3934
67	0,3907	0,3881	0,3854	0,3827	0,3800	0,3773
68	0,3746	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611
69	0,3584	0,3557	0,3529	0,3502	0,3475	0,3448
70°	0,3420	0,3393	0,3365	0,3338	0,3311	0,3283
71	0,3256	0,3228	0,3201	0,3173	0,3145	0,3118
72	0,3090	0,3062	0,3035	0,3007	0,2979	0,2952
73	0,2924	0,2896	0,2868	0,2840	0,2812	0,2784
74	0,2756	0,2728	0,2700	0,2672	0,2644	0,2616
75°	0,2588	0,2560	0,2532	0,2504	0,2476	0,2447
76	0,2419	0,2391	0,2363	0,2334	0,2306	0,2278
77	0,2250	0,2221	0,2193	0,2164	0,2136	0,2108
78	0,2079	0,2051	0,2022	0,1994	0,1965	0,1937
79	0,1908	0,1880	0,1851	0,1822	0,1794	0,1765
80°	0,1736	0,1708	0,1679	0,1650	0,1622	0,1593
81	0,1564	0,1536	0,1507	0,1478	0,1449	0,1421
82	0,1392	0,1363	0,1334	0,1305	0,1276	0,1248
83	0,1219	0,1190	0,1161	0,1132	0,1103	0,1074
84	0,1045	0,1016	0,0987	0,0958	0,0929	0,0901
85°	0,0872	0,0843	0,0814	0,0785	0,0756	0,0727
86	0,0698	0,0669	0,0640	0,0610	0,0581	0,0552
87	0,0523	0,0494	0,0465	0,0436	0,0407	0,0378
88	0,0349	0,0320	0,0291	0,0262	0,0233	0,0204
89	0,0175	0,0145	0,0116	0,0087	0,0058	0,0029
90°	0,0000					

4

tg x (x em graus e minutos)

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846
5°	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733
10°	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648
15°	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607
20°	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628
25°	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735
30°	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959
35°	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342
40°	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942
45°	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295
46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661
47	1,0724	1,0786	1,0850	1,0913	1,0977	1,1041
48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1369	1,1436
49	1,1504	1,1571	1,1640	1,1708	1,1778	1,1847
50°	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276
51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723
52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190
53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680
54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4019	1,4106	1,4193
55°	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733
56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301
57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900
58	1,6003	1,6107	1,6212	1,6319	1,6426	1,6534
59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205
60°	1,7321	1,7437	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917
61	1,8040	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676
62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486
63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353
64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283
65°	2,1445	2,1609	2,1775	2,1943	2,2113	2,2286
66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369
67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545
68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5386	2,5605	2,5826
69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	2,6985	2,7228
70°	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770
71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	3,0178	3,0475
72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371
73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6470	3,6891
75°	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617
76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747
77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6382
78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764
80°	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970
81	6,3138	6,4348	6,5606	6,6912	6,8269	6,9682
82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530
83	8,1443	8,3450	8,5555	8,7769	9,0098	9,2553
84	9,5144	9,7882	10,078	10,385	10,712	11,059
85°	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77
90°	∞					

5 Conversão de Radianos para Graus, Minutos e Segundos ou Frações de Graus

Radianos	Graus	Min	Seg	Frações de Graus
1	57°	17′	44,8″	57,2958°
2	114°	35′	29,6″	114,5916°
3	171°	53′	14,4″	171,8873°
4	229°	10′	59,2″	229,1831°
5	286°	28′	44,0″	286,4789°
6	343°	46′	28,8″	343,7747°
7	401°	4′	13,6″	401,0705°
8	458°	21′	58,4″	458,3662°
9	515°	39′	43,3″	515,6620°
10	572°	57′	28,1″	572,9578°
0,1	5°	43′	46,5″	
0,2	11°	27′	33,0″	
0,3	17°	11′	19,4″	
0,4	22°	55′	5,9″	
0,5	28°	38′	52,4″	
0,6	34°	22′	38,9″	
0,7	40°	6′	25,4″	
0,8	45°	50′	11,8″	
0,9	51°	33′	58,3″	
0,01	0°	34′	22,6″	
0,02	1°	8′	45,3″	
0,03	1°	43′	7,9″	
0,04	2°	17′	30,6″	
0,05	2°	51′	53,2″	
0,06	3°	26′	15,9″	
0,07	4°	0′	38,5″	
0,08	4°	35′	1,2″	
0,09	5°	9′	23,8″	
0,001	0°	3′	26,3″	
0,002	0°	6′	52,5″	
0,003	0°	10′	18,8″	
0,004	0°	13′	45,1″	
0,005	0°	17′	11,3″	
0,006	0°	20′	37,6″	
0,007	0°	24′	3,9″	
0,008	0°	27′	30,1″	
0,009	0°	30′	56,4″	
0,0001	0°	0′	20,6″	
0,0002	0°	0′	41,3″	
0,0003	0°	1′	1,9″	
0,0004	0°	1′	22,5″	
0,0005	0°	1′	43,1″	
0,0006	0°	2′	3,8″	
0,0007	0°	2′	24,4″	
0,0008	0°	2′	45,0″	
0,0009	0°	3′	5,6″	

Conversão de Graus, Minutos e Segundos para Radianos

6

Graus	Radianos
1°	0,0174533
2°	0,0349066
3°	0,0523599
4°	0,0698132
5°	0,0872665
6°	0,1047198
7°	0,1221730
8°	0,1396263
9°	0,1570796
10°	0,1745329

Minutos	Radianos
1′	0,00029089
2′	0,00058178
3′	0,00087266
4′	0,00116355
5′	0,00145444
6′	0,00174533
7′	0,00203622
8′	0,00232711
9′	0,00261800
10′	0,00290888

Segundos	Radianos
1″	0,0000048481
2″	0,0000096963
3″	0,0000145444
4″	0,0000193925
5″	0,0000242407
6″	0,0000290888
7″	0,0000339370
8″	0,0000387851
9″	0,0000436332
10″	0,0000484814

7 Logaritmos Naturais ou Neperianos

$\log_e x$ ou $\ln x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,00000	0,00995	0,01980	0,02956	0,03922	0,04879	0,05827	0,06766	0,07696	0,08618
1,1	0,09531	0,10436	0,11333	0,12222	0,13103	0,13976	0,14842	0,15700	0,16551	0,17395
1,2	0,18232	0,19062	0,19885	0,20701	0,21511	0,22314	0,23111	0,23902	0,24686	0,25464
1,3	0,26236	0,27003	0,27763	0,28518	0,29267	0,30010	0,30748	0,31481	0,32208	0,32930
1,4	0,33647	0,34359	0,35066	0,35767	0,36464	0,37156	0,37844	0,38526	0,39204	0,39878
1,5	0,40547	0,41211	0,41871	0,42527	0,43178	0,43825	0,44469	0,45108	0,45742	0,46373
1,6	0,47000	0,47623	0,48243	0,48858	0,49470	0,50078	0,50682	0,51282	0,51879	0,52473
1,7	0,53063	0,53649	0,54232	0,54812	0,55389	0,55962	0,56531	0,57098	0,57661	0,58222
1,8	0,58779	0,59333	0,59884	0,60432	0,60977	0,61519	0,62058	0,62594	0,63127	0,63658
1,9	0,64185	0,64710	0,65233	0,65752	0,66269	0,66783	0,67294	0,67803	0,68310	0,68813
2,0	0,69315	0,69813	0,70310	0,70804	0,71295	0,71784	0,72271	0,72755	0,73237	0,73716
2,1	0,74194	0,74669	0,75142	0,75612	0,76081	0,76547	0,77011	0,77473	0,77932	0,78390
2,2	0,78846	0,79299	0,79751	0,80200	0,80648	0,81093	0,81536	0,81978	0,82418	0,82855
2,3	0,83291	0,83725	0,84157	0,84587	0,85015	0,85442	0,85866	0,86289	0,86710	0,87129
2,4	0,87547	0,87963	0,88377	0,88789	0,89200	0,89609	0,90016	0,90422	0,90826	0,91228
2,5	0,91629	0,92028	0,92426	0,92822	0,93216	0,93609	0,94001	0,94391	0,94779	0,95166
2,6	0,95551	0,95935	0,96317	0,96698	0,97078	0,97456	0,97833	0,98208	0,98582	0,98954
2,7	0,99325	0,99695	1,00063	1,00430	1,00796	1,01160	1,01523	1,01885	1,02245	1,02604
2,8	1,02962	1,03318	1,03674	1,04028	1,04380	1,04732	1,05082	1,05431	1,05779	1,06126
2,9	1,06471	1,06815	1,07158	1,07500	1,07841	1,08181	1,08519	1,08856	1,09192	1,09527
3,0	1,09861	1,10194	1,10526	1,10856	1,11186	1,11514	1,11841	1,12168	1,12493	1,12817
3,1	1,13140	1,13462	1,13783	1,14103	1,14422	1,14740	1,15057	1,15373	1,15688	1,16002
3,2	1,16315	1,16627	1,16938	1,17248	1,17557	1,17865	1,18173	1,18479	1,18784	1,19089
3,3	1,19392	1,19695	1,19996	1,20297	1,20597	1,20896	1,21194	1,21491	1,21788	1,22083
3,4	1,22378	1,22671	1,22964	1,23256	1,23547	1,23837	1,24127	1,24415	1,24703	1,24990
3,5	1,25276	1,25562	1,25846	1,26130	1,26413	1,26695	1,26976	1,27257	1,27536	1,27815
3,6	1,28093	1,28371	1,28647	1,28923	1,29198	1,29473	1,29746	1,30019	1,30291	1,30563
3,7	1,30833	1,31103	1,31372	1,31641	1,31909	1,32176	1,32442	1,32708	1,32972	1,33237
3,8	1,33500	1,33763	1,34025	1,34286	1,34547	1,34807	1,35067	1,35325	1,35584	1,35841
3,9	1,36098	1,36354	1,36609	1,36864	1,37118	1,37372	1,37624	1,37877	1,38128	1,38379
4,0	1,38629	1,38879	1,39128	1,39377	1,39624	1,39872	1,40118	1,40364	1,40610	1,40854
4,1	1,41099	1,41342	1,41585	1,41828	1,42070	1,42311	1,42552	1,42792	1,43031	1,43270
4,2	1,43508	1,43746	1,43984	1,44220	1,44456	1,44692	1,44927	1,45161	1,45395	1,45629
4,3	1,45862	1,46094	1,46326	1,46557	1,46787	1,47018	1,47247	1,47476	1,47705	1,47933
4,4	1,48160	1,48387	1,48614	1,48840	1,49065	1,49290	1,49515	1,49739	1,49962	1,50185
4,5	1,50408	1,50630	1,50851	1,51072	1,51293	1,51513	1,51732	1,51951	1,52170	1,52388
4,6	1,52606	1,52823	1,53039	1,53256	1,53471	1,53687	1,53902	1,54116	1,54330	1,54543
4,7	1,54756	1,54969	1,55181	1,55393	1,55604	1,55814	1,56025	1,56235	1,56444	1,56653
4,8	1,56862	1,57070	1,57277	1,57485	1,57691	1,57898	1,58104	1,58309	1,58515	1,58719
4,9	1,58924	1,59127	1,59331	1,59534	1,59737	1,59939	1,60141	1,60342	1,60543	1,60744

$\ln 10 = 2{,}30259$ $\quad 4 \ln 10 = 9{,}21034$ $\quad 7 \ln 10 = 16{,}11810$

$2 \ln 10 = 4{,}60517$ $\quad 5 \ln 10 = 11{,}51293$ $\quad 8 \ln 10 = 18{,}42068$

$3 \ln 10 = 6{,}90776$ $\quad 6 \ln 10 = 13{,}81551$ $\quad 9 \ln 10 = 20{,}72327$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	1,60944	1,61144	1,61343	1,61542	1,61741	1,61939	1,62137	1,62334	1,62531	1,62728
5,1	1,62924	1,63120	1,63315	1,63511	1,63705	1,63900	1,64094	1,64287	1,64481	1,64673
5,2	1,64866	1,65058	1,65250	1,65441	1,65632	1,65823	1,66013	1,66203	1,66393	1,66582
5,3	1,66771	1,66959	1,67147	1,67335	1,67523	1,67710	1,67896	1,68083	1,68269	1,68455
5,4	1,68640	1,68825	1,69010	1,69194	1,69378	1,69562	1,69745	1,69928	1,70111	1,70293
5,5	1,70475	1,70656	1,70838	1,71019	1,71199	1,71380	1,71560	1,71740	1,71919	1,72098
5,6	1,72277	1,72455	1,72633	1,72811	1,72988	1,73166	1,73342	1,73519	1,73695	1,73871
5,7	1,74047	1,74222	1,74397	1,74572	1,74746	1,74920	1,75094	1,75267	1,75440	1,75613
5,8	1,75786	1,75958	1,76130	1,76302	1,76473	1,76644	1,76815	1,76985	1,77156	1,77326
5,9	1,77495	1,77665	1,77834	1,78002	1,78171	1,78339	1,78507	1,78675	1,78842	1,79009
6,0	1,79176	1,79342	1,79509	1,79675	1,79840	1,80006	1,80171	1,80336	1,80500	1,80665
6,1	1,80829	1,80993	1,81156	1,81319	1,81482	1,81645	1,81808	1,81970	1,82132	1,82294
6,2	1,82455	1,82616	1,82777	1,82938	1,83098	1,83258	1,83418	1,83578	1,83737	1,83896
6,3	1,84055	1,84214	1,84372	1,84530	1,84688	1,84845	1,85003	1,85160	1,85317	1,85473
6,4	1,85630	1,85786	1,85942	1,86097	1,86253	1,86408	1,86563	1,86718	1,86872	1,87026
6,5	1,87180	1,87334	1,87487	1,87641	1,87794	1,87947	1,88099	1,88251	1,88403	1,88555
6,6	1,88707	1,88858	1,89010	1,89160	1,89311	1,89462	1,89612	1,89762	1,89912	1,90061
6,7	1,90211	1,90360	1,90509	1,90658	1,90806	1,90954	1,91102	1,91250	1,91398	1,91545
6,8	1,91692	1,91839	1,91986	1,92132	1,92279	1,92425	1,92571	1,92716	1,92862	1,93007
6,9	1,93152	1,93297	1,93442	1,93586	1,93730	1,93874	1,94018	1,94162	1,94305	1,94448
7,0	1,94591	1,94734	1,94876	1,95019	1,95161	1,95303	1,95445	1,95586	1,95727	1,95869
7,1	1,96009	1,96150	1,96291	1,96431	1,96571	1,96711	1,96851	1,96991	1,97130	1,97269
7,2	1,97408	1,97547	1,97685	1,97824	1,97962	1,98100	1,98238	1,98376	1,98513	1,98650
7,3	1,98787	1,98924	1,99061	1,99198	1,99334	1,99470	1,99606	1,99742	1,99877	2,00013
7,4	2,00148	2,00283	2,00418	2,00553	2,00687	2,00821	2,00956	2,01089	2,01223	2,01357
7,5	2,01490	2,01624	2,01757	2,01890	2,02022	2,02155	2,02287	2,02419	2,02551	2,02683
7,6	2,02815	2,02946	2,03078	2,03209	2,03340	2,03471	2,03601	2,03732	2,03862	2,03992
7,7	2,04122	2,04252	2,04381	2,04511	2,04640	2,04769	2,04898	2,05027	2,05156	2,05284
7,8	2,05412	2,05540	2,05668	2,05796	2,05924	2,06051	2,06179	2,06306	2,06433	2,06560
7,9	2,06686	2,06813	2,06939	2,07065	2,07191	2,07317	2,07443	2,07568	2,07694	2,07819
8,0	2,07944	2,08069	2,08194	2,08318	2,08443	2,08567	2,08691	2,08815	2,08939	2,09063
8,1	2,09186	2,09310	2,09433	2,09556	2,09679	2,09802	2,09924	2,10047	2,10169	2,10291
8,2	2,10413	2,10535	2,10657	2,10779	2,10900	2,11021	2,11142	2,11263	2,11384	2,11505
8,3	2,11626	2,11746	2,11366	2,11986	2,12106	2,12226	2,12346	2,12465	2,12585	2,12704
8,4	2,12823	2,12942	2,13061	2,13180	2,13298	2,13417	2,13535	2,13653	2,13771	2,13889
8,5	2,14007	2,14124	2,14242	2,14359	2,14476	2,14593	2,14710	2,14827	2,14943	2,15060
8,6	2,15176	2,15292	2,15409	2,15524	2,15640	2,15756	2,15871	2,15987	2,16102	2,16217
8,7	2,16332	2,16447	2,16562	2,16677	2,16791	2,16905	2,17020	2,17134	2,17248	2,17361
8,8	2,17475	2,17589	2,17702	2,17816	2,17929	2,18042	2,18155	2,18267	2,18380	2,18493
8,9	2,18605	2,18717	2,18830	2,18942	2,19054	2,19165	2,19277	2,19389	2,19500	2,19611
9,0	2,19722	2,19834	2,19944	2,20055	2,20166	2,20276	2,20387	2,20497	2,20607	2,20717
9,1	2,20827	2,20937	2,21047	2,21157	2,21266	2,21375	2,21485	2,21594	2,21703	2,21812
9,2	2,21920	2,22029	2,22138	2,22246	2,22354	2,22462	2,22570	2,22678	2,22786	2,22894
9,3	2,23001	2,23109	2,23216	2,23324	2,23431	2,23538	2,23645	2,23751	2,23858	2,23965
9,4	2,24071	2,24177	2,24284	2,24390	2,24496	2,24601	2,24707	2,24813	2,24918	2,25024
9,5	2,25129	2,25234	2,25339	2,25444	2,25549	2,25654	2,25759	2,25863	2,25968	2,26072
9,6	2,26176	2,26280	2,26384	2,26488	2,26592	2,26696	2,26799	2,26903	2,27006	2,27109
9,7	2,27213	2,27316	2,27419	2,27521	2,27624	2,27727	2,27829	2,27932	2,28034	2,28136
9,8	2,28238	2,28340	2,28442	2,28544	2,28646	2,28747	2,28849	2,28950	2,29051	2,29152
9,9	2,29253	2,29354	2,29455	2,29556	2,29657	2,29757	2,29858	2,29958	2,30058	2,30158

8 Função Exponencial Crescente e^x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3,0042	3,0344	3,0649	3,0957	3,1268	3,1582	3,1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3,4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3,7062	3,7434	3,7810	3,8190	3,8574	3,8962	3,9354	3,9749	4,0149
1,4	4,0552	4,0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4,3929	4,4371
1,5	4,4817	4,5267	4,5722	4,6182	4,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5,0028	5,0531	5,1039	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5,3656	5,4195
1,7	5,4739	5,5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,9299	5,9895
1,8	6,0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6,4237	6,4883	6,5535	6,6194
1,9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6,9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7,6906	7,7679	7,8460	7,9248	8,0045	8,0849
2,1	8,1662	8,2482	8,3311	8,4149	8,4994	8,5849	8,6711	8,7583	8,8463	8,9352
2,2	9,0250	9,1157	9,2073	9,2999	9,3933	9,4877	9,5831	9,6794	9,7767	9,8749
2,3	9,9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15,029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16,777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17,814	17,993
2,9	18,174	18,357	18,541	18,728	18,916	19,106	19,298	19,492	19,688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21,328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22,421	22,646	22,874	23,104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25,028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26,576	26,843
3,3	27,113	27,385	27,660	27,938	28,219	28,503	28,789	29,079	29,371	29,666
3,4	29,964	30,265	30,569	30,877	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33,784	34,124	34,467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3,6	36,598	36,966	37,338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3,7	40,447	40,854	41,264	41,679	42,098	42,521	42,948	43,380	43,816	44,256
3,8	44,701	45,150	45,604	46,063	46,525	46,993	47,465	47,942	48,424	48,911
3,9	49,402	49,899	50,400	50,907	51,419	51,935	52,457	52,985	53,517	54,055
4,0	54,598	60,340	66,686	73,700	81,451	90,017	99,484	109,95	121,51	134,29
5,0	148,41	164,02	181,27	200,34	221,41	244,69	270,43	298,87	330,30	365,04
6,0	403,43	445,86	492,75	544,57	601,85	665,14	735,10	812,41	897,85	992,27
7,0	1096,6	1212,0	1339,4	1480,3	1636,0	1808,0	1998,2	2208,3	2440,6	2697,3
8,0	2981,0	3294,5	3641,0	4023,9	4447,1	4914,8	5431,7	6002,9	6634,2	7332,0
9,0	8103,1	8955,3	9897,1	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930
10,0	22026									

Função Exponencial Decrescente e^{-x} 9

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00000	0,99005	0,98020	0,97045	0,96079	0,95123	0,94176	0,93239	0,92312	0,91393
0,1	0,90484	0,89583	0,88692	0,87810	0,86936	0,86071	0,85214	0,84366	0,83527	0,82696
0,2	0,81873	0,81058	0,80252	0,79453	0,78663	0,77880	0,77105	0,76338	0,75578	0,74826
0,3	0,74082	0,73345	0,72615	0,71892	0,71177	0,70469	0,69768	0,69073	0,68386	0,67706
0,4	0,67032	0,66365	0,65705	0,65051	0,64404	0,63763	0,63128	0,62500	0,61878	0,61263
0,5	0,60653	0,60050	0,59452	0,58860	0,58275	0,57695	0,57121	0,56553	0,55990	0,55433
0,6	0,54881	0,54335	0,53794	0,53259	0,52729	0,52205	0,51685	0,51171	0,50662	0,50158
0,7	0,49659	0,49164	0,48675	0,48191	0,47711	0,47237	0,46767	0,46301	0,45841	0,45384
0,8	0,44933	0,44486	0,44043	0,43605	0,43171	0,42741	0,42316	0,41895	0,41478	0,41066
0,9	0,40657	0,40252	0,39852	0,39455	0,39063	0,38674	0,38289	0,37908	0,37531	0,37158
1,0	0,36788	0,36422	0,36060	0,35701	0,35345	0,34994	0,34646	0,34301	0,33960	0,33622
1,1	0,33287	0,32956	0,32628	0,32303	0,31982	0,31664	0,31349	0,31037	0,30728	0,30422
1,2	0,30119	0,29820	0,29523	0,29229	0,28938	0,28650	0,28365	0,28083	0,27804	0,27527
1,3	0,27253	0,26982	0,26714	0,26448	0,26185	0,25924	0,25666	0,25411	0,25158	0,24908
1,4	0,24660	0,24414	0,24171	0,23931	0,23693	0,23457	0,23224	0,22993	0,22764	0,22537
1,5	0,22313	0,22091	0,21871	0,21654	0,21438	0,21225	0,21014	0,20805	0,20598	0,20393
1,6	0,20190	0,19989	0,19790	0,19593	0,19398	0,19205	0,19014	0,18825	0,18637	0,18452
1,7	0,18268	0,18087	0,17907	0,17728	0,17552	0,17377	0,17204	0,17033	0,16864	0,16696
1,8	0,16530	0,16365	0,16203	0,16041	0,15882	0,15724	0,15567	0,15412	0,15259	0,15107
1,9	0,14957	0,14808	0,14661	0,14515	0,14370	0,14227	0,14086	0,13946	0,13807	0,13670
2,0	0,13534	0,13399	0,13266	0,13134	0,13003	0,12873	0,12745	0,12619	0,12493	0,12369
2,1	0,12246	0,12124	0,12003	0,11884	0,11765	0,11648	0,11533	0,11418	0,11304	0,11192
2,2	0,11080	0,10970	0,10861	0,10753	0,10646	0,10540	0,10435	0,10331	0,10228	0,10127
2,3	0,10026	0,09926	0,09827	0,09730	0,09633	0,09537	0,09442	0,09348	0,09255	0,09163
2,4	0,09072	0,08982	0,08892	0,08804	0,08716	0,08629	0,08543	0,08458	0,08374	0,08291
2,5	0,08208	0,08127	0,08046	0,07966	0,07887	0,07808	0,07730	0,07654	0,07577	0,07502
2,6	0,07427	0,07353	0,07280	0,07208	0,07136	0,07065	0,06995	0,06925	0,06856	0,06788
2,7	0,06721	0,06654	0,06587	0,06522	0,06457	0,06393	0,06329	0,06266	0,06204	0,06142
2,8	0,06081	0,06020	0,05961	0,05901	0,05843	0,05784	0,05727	0,05670	0,05613	0,05558
2,9	0,05502	0,05448	0,05393	0,05340	0,05287	0,05234	0,05182	0,05130	0,05079	0,05029
3,0	0,04979	0,04929	0,04880	0,04832	0,04783	0,04736	0,04689	0,04642	0,04596	0,04550
3,1	0,04505	0,04460	0,04416	0,04372	0,04328	0,04285	0,04243	0,04200	0,04159	0,04117
3,2	0,04076	0,04036	0,03996	0,03956	0,03916	0,03877	0,03839	0,03801	0,03763	0,03725
3,3	0,03688	0,03652	0,03615	0,03579	0,03544	0,03508	0,03474	0,03439	0,03405	0,03371
3,4	0,03337	0,03304	0,03271	0,03239	0,03206	0,03175	0,03143	0,03112	0,03081	0,03050
3,5	0,03020	0,02990	0,02960	0,02930	0,02901	0,02872	0,02844	0,02816	0,02788	0,02760
3,6	0,02732	0,02705	0,02678	0,02652	0,02625	0,02599	0,02573	0,02548	0,02522	0,02497
3,7	0,02472	0,02448	0,02423	0,02399	0,02375	0,02352	0,02328	0,02305	0,02282	0,02260
3,8	0,02237	0,02215	0,02193	0,02171	0,02149	0,02128	0,02107	0,02086	0,02065	0,02045
3,9	0,02024	0,02004	0,01984	0,01964	0,01945	0,01925	0,01906	0,01887	0,01869	0,01850
4,0	0,018316	0,016573	0,014996	0,013569	0,012277	0,011109	0,010052	$0{,}0^{2}90953$	$0{,}0^{2}82297$	$0{,}0^{2}74466$
5,0	$0{,}0^{2}67379$	$0{,}0^{2}60967$	$0{,}0^{2}55166$	$0{,}0^{2}49916$	$0{,}0^{2}45166$	$0{,}0^{2}40868$	$0{,}0^{2}36979$	$0{,}0^{2}33460$	$0{,}0^{2}30276$	$0{,}0^{2}27394$
6,0	$0{,}0^{2}24788$	$0{,}0^{2}22429$	$0{,}0^{2}20294$	$0{,}0^{2}18363$	$0{,}0^{2}16616$	$0{,}0^{2}15034$	$0{,}0^{2}13604$	$0{,}0^{2}12309$	$0{,}0^{2}11138$	$0{,}0^{2}10078$
7,0	$0{,}0^{3}91188$	$0{,}0^{3}82510$	$0{,}0^{3}74659$	$0{,}0^{3}67554$	$0{,}0^{3}61125$	$0{,}0^{3}55308$	$0{,}0^{3}50045$	$0{,}0^{3}45283$	$0{,}0^{3}40973$	$0{,}0^{3}37074$
8,0	$0{,}0^{3}33546$	$0{,}0^{3}30354$	$0{,}0^{3}27465$	$0{,}0^{3}24852$	$0{,}0^{3}22487$	$0{,}0^{3}20347$	$0{,}0^{3}18411$	$0{,}0^{3}16659$	$0{,}0^{3}15073$	$0{,}0^{3}13639$
9,0	$0{,}0^{3}12341$	$0{,}0^{3}11167$	$0{,}0^{3}10104$	$0{,}0^{4}91424$	$0{,}0^{4}82724$	$0{,}0^{4}74852$	$0{,}0^{4}67729$	$0{,}0^{4}61283$	$0{,}0^{4}55452$	$0{,}0^{4}50175$
10,0	$0{,}0^{4}45400$									

10 Integrais Exponencial, Seno e Cosseno

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du, \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du, \quad \mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$$

x	Ei(x)	Si(x)	Ci(x)
0,0	∞	0,0000	∞
0,5	0,5598	0,4931	0,1778
1,0	0,2194	0,9461	–0,3374
1,5	0,1000	1,3247	–0,4704
2,0	0,04890	1,6054	–0,4230
2,5	0,02491	1,7785	–0,2859
3,0	0,01305	1,8487	–0,1196
3,5	$0{,}0^{2}6970$	1,8331	0,0321
4,0	$0{,}0^{2}3779$	1,7582	0,1410
4,5	$0{,}0^{2}2073$	1,6541	0,1935
5,0	$0{,}0^{2}1148$	1,5499	0,1900
5,5	$0{,}0^{3}6409$	1,4687	0,1421
6,0	$0{,}0^{3}3601$	1,4247	0,0681
6,5	$0{,}0^{3}2034$	1,4218	–0,0111
7,0	$0{,}0^{3}1155$	1,4546	–0,0767
7,5	$0{,}0^{4}6583$	1,5107	–0,1156
8,0	$0{,}0^{4}3767$	1,5742	–0,1224
8,5	$0{,}0^{4}2162$	1,6296	–0,09943
9,0	$0{,}0^{4}1245$	1,6650	–0,05535
9,5	$0{,}0^{5}7185$	1,6745	$-0{,}0^{2}2678$
10,0	$0{,}0^{5}4157$	1,6583	–0,04546

Seção II: Fatorial, Função Gama e Coeficientes Binomiais

Fatorial de n 11

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

n	$n!$
0	1 (por definição)
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.428.096.000
18	6.402.373.705.728.000
19	121.645.100.408.832.000
20	2.432.902.008.176.640.000
21	51.090.942.171.709.440.000
22	1.124.000.727.777.607.680.000
23	25.852.016.738.884.976.640.000
24	620.448.401.733.239.439.360.000
25	15.511.210.043.330.985.984.000.000
26	403.291.461.126.605.635.584.000.000
27	10.888.869.450.418.352.160.768.000.000
28	304.888.344.611.713.860.501.504.000.000
29	8.841.761.993.739.701.954.543.616.000.000
30	265.252.859.812.191.058.636.308.480.000.000
31	$8{,}22284 \times 10^{33}$
32	$2{,}63131 \times 10^{35}$
33	$8{,}68332 \times 10^{36}$
34	$2{,}95233 \times 10^{38}$
35	$1{,}03331 \times 10^{40}$
36	$3{,}71993 \times 10^{41}$
37	$1{,}37638 \times 10^{43}$
38	$5{,}23023 \times 10^{44}$
39	$2{,}03979 \times 10^{46}$

n	$n!$
40	$8{,}15915 \times 10^{47}$
41	$3{,}34525 \times 10^{49}$
42	$1{,}40501 \times 10^{51}$
43	$6{,}04153 \times 10^{52}$
44	$2{,}65827 \times 10^{54}$
45	$1{,}19622 \times 10^{56}$
46	$5{,}50262 \times 10^{57}$
47	$2{,}58623 \times 10^{59}$
48	$1{,}24139 \times 10^{61}$
49	$6{,}08282 \times 10^{62}$
50	$3{,}04141 \times 10^{64}$
51	$1{,}55112 \times 10^{66}$
52	$8{,}06582 \times 10^{67}$
53	$4{,}27488 \times 10^{69}$
54	$2{,}30844 \times 10^{71}$
55	$1{,}26964 \times 10^{73}$
56	$7{,}10999 \times 10^{74}$
57	$4{,}05269 \times 10^{76}$
58	$2{,}35056 \times 10^{78}$
59	$1{,}38683 \times 10^{80}$
60	$8{,}32099 \times 10^{81}$
61	$5{,}07580 \times 10^{83}$
62	$3{,}14700 \times 10^{85}$
63	$1{,}98261 \times 10^{87}$
64	$1{,}26887 \times 10^{89}$
65	$8{,}24765 \times 10^{90}$
66	$5{,}44345 \times 10^{92}$
67	$3{,}64711 \times 10^{94}$
68	$2{,}48004 \times 10^{96}$
69	$1{,}71122 \times 10^{98}$
70	$1{,}19786 \times 10^{100}$
71	$8{,}50479 \times 10^{101}$
72	$6{,}12345 \times 10^{103}$
73	$4{,}47012 \times 10^{105}$
74	$3{,}30789 \times 10^{107}$
75	$2{,}48091 \times 10^{109}$
76	$1{,}88549 \times 10^{111}$
77	$1{,}45183 \times 10^{113}$
78	$1{,}13243 \times 10^{115}$
79	$8{,}94618 \times 10^{116}$

n	$n!$
80	$7{,}15695 \times 10^{118}$
81	$5{,}79713 \times 10^{120}$
82	$4{,}75364 \times 10^{122}$
83	$3{,}94552 \times 10^{124}$
84	$3{,}31424 \times 10^{126}$
85	$2{,}81710 \times 10^{128}$
86	$2{,}42271 \times 10^{130}$
87	$2{,}10776 \times 10^{132}$
88	$1{,}85483 \times 10^{134}$
89	$1{,}65080 \times 10^{136}$
90	$1{,}48572 \times 10^{138}$
91	$1{,}35200 \times 10^{140}$
92	$1{,}24384 \times 10^{142}$
93	$1{,}15677 \times 10^{144}$
94	$1{,}08737 \times 10^{146}$
95	$1{,}03300 \times 10^{148}$
96	$9{,}91678 \times 10^{149}$
97	$9{,}61928 \times 10^{151}$
98	$9{,}42689 \times 10^{153}$
99	$9{,}33262 \times 10^{155}$
100	$9{,}33262 \times 10^{157}$

12 Função Gama

$$\Gamma(x) = \int_x^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \qquad \text{para } 1 \leqq x \leqq 2$$

[Para outros valores, use a fórmula $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$]

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,50	0,88623
1,01	0,99433	1,51	0,88659
1,02	0,98884	1,52	0,88704
1,03	0,98355	1,53	0,88757
1,04	0,97844	1,54	0,88818
1,05	0,97350	1,55	0,88887
1,06	0,96874	1,56	0,88964
1,07	0,96415	1,57	0,89049
1,08	0,95973	1,58	0,89142
1,09	0,95546	1,59	0,89243
1,10	0,95135	1,60	0,89352
1,11	0,94740	1,61	0,89468
1,12	0,94359	1,62	0,89592
1,13	0,93993	1,63	0,89724
1,14	0,93642	1,64	0,89864
1,15	0,93304	1,65	0,90012
1,16	0,92980	1,66	0,90167
1,17	0,92670	1,67	0,90330
1,18	0,92373	1,68	0,90500
1,19	0,92089	1,69	0,90678
1,20	0,91817	1,70	0,90864
1,21	0,91558	1,71	0,91057
1,22	0,91311	1,72	0,91258
1,23	0,91075	1,73	0,91467
1,24	0,90852	1,74	0,91683
1,25	0,90640	1,75	0,91906
1,26	0,90440	1,76	0,92137
1,27	0,90250	1,77	0,92376
1,28	0,90072	1,78	0,92623
1,29	0,89904	1,79	0,92877
1,30	0,89747	1,80	0,93138
1,31	0,89600	1,81	0,93408
1,32	0,89464	1,82	0,93685
1,33	0,89338	1,83	0,93969
1,34	0,89222	1,84	0,94261
1,35	0,89115	1,85	0,94561
1,36	0,89018	1,86	0,94869
1,37	0,88931	1,87	0,95184
1,38	0,88854	1,88	0,95507
1,39	0,88785	1,89	0,95838
1,40	0,88726	1,90	0,96177
1,41	0,88676	1,91	0,96523
1,42	0,88636	1,92	0,96877
1,43	0,88604	1,93	0,97240
1,44	0,88581	1,94	0,97610
1,45	0,88566	1,95	0,97988
1,46	0,88560	1,96	0,98374
1,47	0,88563	1,97	0,98768
1,48	0,88575	1,98	0,99171
1,49	0,88595	1,99	0,99581
1,50	0,88623	2,00	1,00000

13 Coeficientes Binomiais

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k}, \quad 0! = 1$$

Observe que cada número é a soma de dois números na linha acima; um destes números está na mesma coluna e o outro na coluna precedente [por exemplo, 56 = 21 + 35]. Este arranjo é chamado de *Triângulo de Pascal* [ver 3.6, p. 18].

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960
21	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930
22	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420
23	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190
24	1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504
25	1	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975
26	1	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275	3124550
27	1	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075	4686825
28	1	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105	6906900
29	1	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145	10015005
30	1	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925	14307150

n \ k	10	11	12	13	14	15
10	1					
11	11	1				
12	66	12	1			
13	286	78	13	1		
14	1001	364	91	14	1	
15	3003	1365	455	105	15	1
16	8008	4368	1820	560	120	16
17	19448	12376	6188	2380	680	136
18	43758	31824	18564	8568	3060	816
19	92378	75582	50388	27132	11628	3876
20	184756	167960	125970	77520	38760	15504
21	352716	352716	293930	203490	116280	54264
22	646646	705432	646646	497420	319770	170544
23	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314
24	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504
25	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760
26	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160
27	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860
28	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160
29	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760
30	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520

Para $k > 15$, use o fato de que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

14 Funções de Bessel $J_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1,0000	0,9975	0,9900	0,9776	0,9604	0,9385	0,9120	0,8812	0,8463	0,8075
1.	0,7652	0,7196	0,6711	0,6201	0,5669	0,5118	0,4554	0,3980	0,3400	0,2818
2.	0,2239	0,1666	0,1104	0,0555	0,0025	–0,0484	–0,0968	–0,1424	–0,1850	–0,2243
3.	–0,2601	–0,2921	–0,3202	–0,3443	–0,3643	–0,3801	–0,3918	–0,3992	–0,4026	–0,4018
4.	–0,3971	–0,3887	–0,3766	–0,3610	–0,3423	–0,3205	–0,2961	–0,2693	–0,2404	–0,2097
5.	–0,1776	–0,1443	–0,1103	–0,0758	–0,0412	–0,0068	0,0270	0,0599	0,0917	0,1220
6.	0,1506	0,1773	0,2017	0,2238	0,2433	0,2601	0,2740	0,2851	0,2931	0,2981
7.	0,3001	0,2991	0,2951	0,2882	0,2786	0,2663	0,2516	0,2346	0,2154	0,1944
8.	0,1717	0,1475	0,1222	0,0960	0,0692	0,0419	0,0146	–0,0125	–0,0392	–0,0653
9.	–0,0903	–0,1142	–0,1367	–0,1577	–0,1768	–0,1939	–0,2090	–0,2218	–0,2323	–0,2403

15 Funções de Bessel $J_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,0000	0,0499	0,0995	0,1483	0,1960	0,2423	0,2867	0,3290	0,3688	0,4059
1.	0,4401	0,4709	0,4983	0,5220	0,5419	0,5579	0,5699	0,5778	0,5815	0,5812
2.	0,5767	0,5683	0,5560	0,5399	0,5202	0,4971	0,4708	0,4416	0,4097	0,3754
3.	0,3391	0,3009	0,2613	0,2207	0,1792	0,1374	0,0955	0,0538	0,0128	–0,0272
4.	–0,0660	–0,1033	–0,1386	–0,1719	–0,2028	–0,2311	–0,2566	–0,2791	–0,2985	–0,3147
5.	–0,3276	–0,3371	–0,3432	–0,3460	–0,3453	–0,3414	–0,3343	–0,3241	–0,3110	–0,2951
6.	–0,2767	–0,2559	–0,2329	–0,2081	–0,1816	–0,1538	–0,1250	–0,0953	–0,0652	–0,0349
7.	–0,0047	0,0252	0,0543	0,0826	0,1096	0,1352	0,1592	0,1813	0,2014	0,2192
8.	0,2346	0,2476	0,2580	0,2657	0,2708	0,2731	0,2728	–0,2697	–0,2641	–0,2559
9.	–0,2453	–0,2324	–0,2174	–0,2004	–0,1816	–0,1613	–0,1395	–0,1166	–0,0928	–0,0684

16 Funções de Bessel $Y_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	$-\infty$	−1,5342	−1,0811	−0,8073	−0,6060	−0,4445	−0,3085	−0,1907	−0,0868	0,0056
1.	0,0883	0,1622	0,2281	0,2865	0,3379	0,3824	0,4204	0,4520	0,4774	0,4968
2.	0,5104	0,5183	0,5208	0,5181	0,5104	0,4981	0,4813	0,4605	0,4359	0,4079
3.	0,3769	0,3431	0,3071	0,2691	0,2296	0,1890	0,1477	0,1061	0,0645	0,0234
4.	−0,0169	−0,0561	−0,0938	−0,1296	−0,1633	−0,1947	−0,2235	−0,2494	−0,2723	−0,2921
5.	−0,3085	−0,3216	−0,3313	−0,3374	−0,3402	−0,3395	−0,3354	−0,3282	−0,3177	−0,3044
6.	−0,2882	−0,2694	−0,2483	−0,2251	−0,1999	−0,1732	−0,1452	−0,1162	−0,0864	−0,0563
7.	−0,0259	0,0042	0,0339	0,0628	0,0907	0,1173	0,1424	0,1658	0,1872	0,2065
8.	0,2235	0,2381	0,2501	0,2595	0,2662	0,2702	0,2715	0,2700	0,2659	0,2592
9.	0,2499	0,2383	0,2245	0,2086	0,1907	0,1712	0,1502	0,1279	0,1045	0,0804

17 Funções de Bessel $Y_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	$-\infty$	−6,4590	−3,3238	−2,2931	−1,7809	−1,4715	−1,2604	−1,1032	−0,9781	−0,8731
1.	−0,7812	−0,6981	−0,6211	−0,5485	−0,4791	−0,4123	−0,3476	−0,2847	−0,2237	−0,1644
2.	−0,1070	−0,0517	0,0015	0,0523	0,1005	0,1459	0,1884	0,2276	0,2635	0,2959
3.	0,3247	0,3496	0,3707	0,3879	0,4010	0,4102	0,4154	0,4167	0,4141	0,4078
4.	0,3979	0,3846	0,3680	0,3484	0,3260	0,3010	0,2737	0,2445	0,2136	0,1812
5.	0,1479	0,1137	0,0792	0,0445	0,0101	−0,0238	−0,0568	−0,0887	−0,1192	−0,1481
6.	−0,1750	−0,1998	−0,2223	−0,2422	−0,2596	−0,2741	−0,2857	−0,2945	−0,3002	−0,3029
7.	−0,3027	−0,2995	−0,2934	−0,2846	−0,2731	−0,2591	−0,2428	−0,2243	−0,2039	−0,1817
8.	−0,1581	−0,1331	−0,1072	−0,0806	−0,0535	−0,0262	0,0011	0,0280	0,0544	0,0799
9.	0,1043	0,1275	0,1491	0,1691	0,1871	0,2032	0,2171	0,2287	0,2379	0,2447

18

Funções de Bessel $I_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1,000	1,003	1,010	1,023	1,040	1,063	1,092	1,126	1,167	1,213
1.	1,266	1,326	1,394	1,469	1,553	1,647	1,750	1,864	1,990	2,128
2.	2,280	2,446	2,629	2,830	3,049	3,290	3,553	3,842	4,157	4,503
3.	4,881	5,294	5,747	6,243	6,785	7,378	8,028	8,739	9,517	10,37
4.	11,30	12,32	13,44	14,67	16,01	17,48	19,09	20,86	22,79	24,91
5.	27,24	29,79	32,58	35,65	39,01	42,69	46,74	51,17	56,04	61,38
6.	67,23	73,66	80,72	88,46	96,96	106,3	116,5	127,8	140,1	153,7
7.	168,6	185,0	202,9	222,7	244,3	268,2	294,3	323,1	354,7	389,4
8.	427,6	469,5	515,6	566,3	621,9	683,2	750,5	824,4	905,8	995,2
9.	1094	1202	1321	1451	1595	1753	1927	2119	2329	2561

19

Funções de Bessel $I_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,0000	0,0501	0,1005	0,1517	0,2040	0,2579	0,3137	0,3719	0,4329	0,4971
1.	0,5652	0,6375	0,7147	0,7973	0,8861	0,9817	1,085	1,196	1,317	1,448
2.	1,591	1,745	1,914	2,098	2,298	2,517	2,755	3,016	3,301	3,613
3.	3,953	4,326	4,734	5,181	5,670	6,206	6,793	7,436	8,140	8,913
4.	9,759	10,69	11,71	12,82	14,05	15,39	16,86	18,48	20,25	22,20
5.	24,34	26,68	29,25	32,08	35,18	38,59	42,33	46,44	50,95	55,90
6.	61,34	67,32	73,89	81,10	89,03	97,74	107,3	117,8	129,4	142,1
7.	156,0	171,4	188,3	206,8	227,2	249,6	274,2	301,3	331,1	363,9
8.	399,9	439,5	483,0	531,0	583,7	641,6	705,4	775,5	852,7	937,5
9.	1031	1134	1247	1371	1508	1658	1824	2006	2207	2428

20 Funções de Bessel $K_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	2,4271	1,7527	1,3725	1,1145	0,9244	0,7775	0,6605	0,5653	0,4867
1.	0,4210	0,3656	0,3185	0,2782	0,2437	0,2138	0,1880	0,1655	0,1459	0,1288
2.	0,1139	0,1008	0,08927	0,07914	0,07022	0,06235	0,05540	0,04926	0,04382	0,03901
3.	0,03474	0,03095	0,02759	0,02461	0,02196	0,01960	0,01750	0,01563	0,01397	0,01248
4.	0,01116	$0,0^{2}9980$	$0,0^{2}8927$	$0,0^{2}7988$	$0,0^{2}7149$	$0,0^{2}6400$	$0,0^{2}5730$	$0,0^{2}5132$	$0,0^{2}4597$	$0,0^{2}4119$
5.	$0,0^{2}3691$	$0,0^{2}3308$	$0,0^{2}2966$	$0,0^{2}2659$	$0,0^{2}2385$	$0,0^{2}2139$	$0,0^{2}1918$	$0,0^{2}1721$	$0,0^{2}1544$	$0,0^{2}1386$
6.	$0,0^{2}1244$	$0,0^{2}1117$	$0,0^{2}1003$	$0,0^{3}9001$	$0,0^{3}8083$	$0,0^{3}7259$	$0,0^{3}6520$	$0,0^{3}5857$	$0,0^{3}5262$	$0,0^{3}4728$
7.	$0,0^{3}4248$	$0,0^{3}3817$	$0,0^{3}3431$	$0,0^{3}3084$	$0,0^{3}2772$	$0,0^{3}2492$	$0,0^{3}2240$	$0,0^{3}2014$	$0,0^{3}1811$	$0,0^{3}1629$
8.	$0,0^{3}1465$	$0,0^{3}1317$	$0,0^{3}1185$	$0,0^{3}1066$	$0,0^{4}9588$	$0,0^{4}8626$	$0,0^{4}7761$	$0,0^{4}6983$	$0,0^{4}6283$	$0,0^{4}5654$
9.	$0,0^{4}5088$	$0,0^{4}4579$	$0,0^{4}4121$	$0,0^{4}3710$	$0,0^{4}3339$	$0,0^{4}3006$	$0,0^{4}2706$	$0,0^{4}2436$	$0,0^{4}2193$	$0,0^{4}1975$

21 Funções de Bessel $K_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	9,8538	4,7760	3,0560	2,1844	1,6564	1,3028	1,0503	0,8618	0,7165
1.	0,6019	0,5098	0,4346	0,3725	0,3208	0,2774	0,2406	0,2094	0,1826	0,1597
2.	0,1399	0,1227	0,1079	0,09498	0,08372	0,07389	0,06528	0,05774	0,05111	0,04529
3.	0,04016	0,03563	0,03164	0,02812	0,02500	0,02224	0,01979	0,01763	0,01571	0,01400
4.	0,01248	0,01114	$0,0^{2}9938$	$0,0^{2}8872$	$0,0^{2}7923$	$0,0^{2}7078$	$0,0^{2}6325$	$0,0^{2}5654$	$0,0^{2}5055$	$0,0^{2}4521$
5.	$0,0^{2}4045$	$0,0^{2}3619$	$0,0^{2}3239$	$0,0^{2}2900$	$0,0^{2}2597$	$0,0^{2}2326$	$0,0^{2}2083$	$0,0^{2}1866$	$0,0^{2}1673$	$0,0^{2}1499$
6.	$0,0^{2}1344$	$0,0^{2}1205$	$0,0^{2}1081$	$0,0^{3}9691$	$0,0^{3}8693$	$0,0^{3}7799$	$0,0^{3}6998$	$0,0^{3}6280$	$0,0^{3}5636$	$0,0^{3}5059$
7.	$0,0^{3}4542$	$0,0^{3}4078$	$0,0^{3}3662$	$0,0^{3}3288$	$0,0^{3}2953$	$0,0^{3}2653$	$0,0^{3}2383$	$0,0^{3}2141$	$0,0^{3}1924$	$0,0^{3}1729$
8.	$0,0^{3}1554$	$0,0^{3}1396$	$0,0^{3}1255$	$0,0^{3}1128$	$0,0^{3}1014$	$0,0^{4}9120$	$0,0^{4}8200$	$0,0^{4}7374$	$0,0^{4}6631$	$0,0^{4}5964$
9.	$0,0^{4}5364$	$0,0^{4}4825$	$0,0^{4}4340$	$0,0^{4}3904$	$0,0^{4}3512$	$0,0^{4}3160$	$0,0^{4}2843$	$0,0^{4}2559$	$0,0^{4}2302$	$0,0^{4}2072$

22 Funções de Bessel Ber (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9980	0,9962	0,9936	0,9898
1.	0,9844	0,9771	0,9676	0,9554	0,9401	0,9211	0,8979	0,8700	0,8367	0,7975
2.	0,7517	0,6987	0,6377	0,5680	0,4890	0,4000	0,3001	0,1887	0,06511	−,07137
3.	−0,2214	−0,3855	−0,5644	−0,7584	−0,9680	−1,1936	−1,4353	−1,6933	−1,9674	−2,2576
4.	−2,5634	−2,8843	−3,2195	−3,5679	−3,9283	−4,2991	−4,6784	−5,0639	−5,4531	−5,8429
5.	−6,2301	−6,6107	−6,9803	−7,3344	−7,6674	−7,9736	−8,2466	−8,4794	−8,6644	−8,7937
6.	−8,8583	−8,8491	−8,7561	−8,5688	−8,2762	−7,8669	−7,3287	−6,6492	−5,8155	−4,8146
7.	−3,6329	−2,2571	−0,6737	1,1308	3,1695	5,4550	7,9994	10,814	13,909	17,293
8.	20,974	24,957	29,245	33,840	38,738	43,936	49,423	55,187	61,210	67,469
9.	73,936	80,576	87,350	94,208	101,10	107,95	114,70	121,26	127,54	133,43

23 Funções de Bessel Bei (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	0,0000	$0{,}0^{2}2500$	0,01000	0,02250	0,04000	0,06249	0,08998	0,1224	0,1599	0,2023
1.	0,2496	0,3017	0,3587	0,4204	0,4867	0,5576	0,6327	0,7120	0,7953	0,8821
2.	0,9723	1,0654	1,1610	1,2585	1,3575	1,4572	1,5569	1,6557	1,7529	1,8472
3.	1,9376	2,0228	2,1016	2,1723	2,2334	2,2832	2,3199	2,3413	2,3454	2,3300
4.	2,2927	2,2309	2,1422	2,0236	1,8726	1,6860	1,4610	1,1946	0,8837	0,5251
5.	0,1160	−0,3467	−0,8658	−1,4443	−2,0845	−2,7890	−3,5597	−4,3986	−5,3068	−6,2854
6.	−7,3347	−8,4545	−9,6437	−10,901	−12,223	−13,607	−15,047	−16,538	−18,074	−19,644
7.	−21,239	−22,848	−24,456	−26,049	−27,609	−29,116	−30,548	−31,882	−33,092	−34,147
8.	−35,017	−35,667	−36,061	−36,159	−35,920	−35,298	−34,246	−32,714	−30,651	−28,003
9.	−24,713	−20,724	−15,976	−10,412	−3,9693	3,4106	11,787	21,218	31,758	43,459

24 Funções de Bessel Ker (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	2,4205	1,7331	1,3372	1,0626	0,8559	0,6931	0,5614	0,4529	0,3625
1.	0,2867	0,2228	0,1689	0,1235	0,08513	0,05293	0,02603	0,0^{2}3691	–0,01470	–0,02966
2.	–0,04166	–0,05111	–0,05834	–0,06367	–0,06737	–0,06969	–0,07083	–0,07097	–0,07030	–0,06894
3.	–0,06703	–0,06468	–0,06198	–0,05903	–0,05590	–0,05264	–0,04932	–0,04597	–0,04265	–0,03937
4.	–0,03618	–0,03308	–0,03011	–0,02726	–0,02456	–0,02200	–0,01960	–0,01734	–0,01525	–0,01330
5.	–0,01151	–0,0^{2}9865	–0,0^{2}8359	–0,0^{2}6989	–0,0^{2}5749	–0,0^{2}4632	–0,0^{2}3632	–0,0^{2}2740	–0,0^{2}1952	–0,0^{2}1258
6.	–0,0^{3}6530	–0,0^{3}1295	0,0^{3}3191	0,0^{3}6991	0,0^{2}1017	0,0^{2}1278	0,0^{2}1488	0,0^{2}1653	0,0^{2}1777	0,0^{2}1866
7.	0,0^{2}1922	0,0^{2}1951	0,0^{2}1956	0,0^{2}1940	0,0^{2}1907	0,0^{2}1860	0,0^{2}1800	0,0^{2}1731	0,0^{2}1655	0,0^{2}1572
8.	0,0^{2}1486	0,0^{2}1397	0,0^{2}1306	0,0^{2}1216	0,0^{2}1126	0,0^{2}1037	0,0^{3}9511	0,0^{3}8675	0,0^{3}7871	0,0^{3}7102
9.	0,0^{3}6372	0,0^{3}5681	0,0^{3}5030	0,0^{3}4422	0,0^{3}3855	0,0^{3}3330	0,0^{3}2846	0,0^{3}2402	0,0^{3}1996	0,0^{3}1628

25 Funções de Bessel Kei (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	9,8538	4,7760	3,0560	2,1844	1,6564	1,3028	1,0503	0,8618	0,7165
1.	0,6019	0,5098	0,4346	0,3725	0,3208	0,2774	0,2406	0,2094	0,1826	0,1597
2.	0,1399	0,1227	0,1079	0,09498	0,08372	0,07389	0,06528	0,05774	0,05111	0,04529
3.	0,04016	0,03563	0,03164	0,02812	0,02500	0,02224	0,01979	0,01763	0,01571	0,01400
4.	0,01248	0,01114	0,0^{2}9938	0,0^{2}8872	0,0^{2}7923	0,0^{2}7078	0,0^{2}6325	0,0^{2}5654	0,0^{2}5055	0,0^{2}4521
5.	0,0^{2}4045	0,0^{2}3619	0,0^{2}3239	0,0^{2}2900	0,0^{2}2597	0,0^{2}2326	0,0^{2}2083	0,0^{2}1866	0,0^{2}1673	0,0^{2}1499
6.	0,0^{2}1344	0,0^{2}1205	0,0^{2}1081	0,0^{3}9691	0,0^{3}8693	0,0^{3}7799	0,0^{3}6998	0,0^{3}6280	0,0^{3}5636	0,0^{3}5059
7.	0,0^{3}4542	0,0^{3}4078	0,0^{3}3662	0,0^{3}3288	0,0^{3}2953	0,0^{3}2653	0,0^{3}2383	0,0^{3}2141	0,0^{3}1924	0,0^{3}1729
8.	0,0^{3}1554	0,0^{3}1396	0,0^{3}1255	0,0^{3}1128	0,0^{3}1014	0,0^{4}9120	0,0^{4}8200	0,0^{4}7374	0,0^{4}6631	0,0^{4}5964
9.	0,0^{4}5364	0,0^{4}4825	0,0^{4}4340	0,0^{4}3904	0,0^{4}3512	0,0^{4}3160	0,0^{4}2843	0,0^{4}2559	0,0^{4}2302	0,0^{4}2072

Valores Aproximados de Zeros de Funções de Bessel 26

A seguinte tabela apresenta as primeiras seis raízes positivas de várias equações. Observe que em todos os casos listados as raízes sucessivas diferem, aproximadamente, por $\pi = 3{,}14159\ldots$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715	9,9361
	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386	13,5893
	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002	17,0038
	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801	20,3208
	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178	23,5861
	18,0711	19,6159	21,1170	22,5827	24,0190	25,4303	26,8202
$Y_n(x) = 0$	0,8936	2,1971	3,3842	4,5270	5,6452	6,7472	7,8377
	3,9577	5,4297	6,7938	8,0976	9,3616	10,5972	11,8110
	7,0861	8,5960	10,0235	11,3965	12,7301	14,0338	15,3136
	10,2223	11,7492	13,2100	14,6231	15,9996	17,3471	18,6707
	13,3611	14,8974	16,3790	17,8185	19,2244	20,6029	21,9583
	16,5009	18,0434	19,5390	20,9973	22,4248	23,8265	25,2062
$J'_n(x) = 0$	0,0000	1,8412	3,0542	4,2012	5,3176	6,4156	7,5013
	3,8317	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199	11,7349
	7,0156	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872	15,2682
	10,1735	11,7060	13,1704	14,5859	15,9641	17,3128	18,6374
	13,3237	14,8636	16,3475	17,7888	19,1960	20,5755	21,9317
	16,4706	18,0155	19,5129	20,9725	22,4010	23,8036	25,1839
$Y'_n(x) = 0$	2,1971	3,6830	5,0026	6,2536	7,4649	8,6496	9,8148
	5,4297	6,9415	8,3507	9,6988	11,0052	12,2809	13,5328
	8,5960	10,1234	11,5742	12,9724	14,3317	15,6608	16,9655
	11,7492	13,2858	14,7609	16,1905	17,5844	18,9497	20,2913
	14,8974	16,4401	17,9313	19,3824	20,8011	22,1928	23,5619
	18,0434	19,5902	21,0929	22,5598	23,9970	25,4091	26,7995

27 Polinômios de Legendre $P_n(x)$

$[P_0(x) = 1, P_1(x) = x]$

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
0,00	–0,5000	0,0000	0,3750	0,0000
0,05	–0,4963	–0,0747	0,3657	0,0927
0,10	–0,4850	–0,1475	0,3379	0,1788
0,15	–0,4663	–0,2166	0,2928	0,2523
0,20	–0,4400	–0,2800	0,2320	0,3075
0,25	–0,4063	–0,3359	0,1577	0,3397
0,30	–0,3650	–0,3825	0,0729	0,3454
0,35	–0,3163	–0,4178	–0,0187	0,3225
0,40	–0,2600	–0,4400	–0,1130	0,2706
0,45	–0,1963	–0,4472	–0,2050	0,1917
0,50	–0,1250	–0,4375	–0,2891	0,0898
0,55	–0,0463	–0,4091	–0,3590	–0,0282
0,60	0,0400	–0,3600	–0,4080	–0,1526
0,65	0,1338	–0,2884	–0,4284	–0,2705
0,70	0,2350	–0,1925	–0,4121	–0,3652
0,75	0,3438	–0,0703	–0,3501	–0,4164
0,80	0,4600	0,0800	–0,2330	–0,3995
0,85	0,5838	0,2603	–0,0506	–0,2857
0,90	0,7150	0,4725	0,2079	–0,0411
0,95	0,8538	0,7184	0,5541	0,3727
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Polinômios de Legendre $P_n(\cos\theta)$ 28

$[P_0(\cos\theta) = 1]$

θ	$P_1(\cos\theta)$	$P_2(\cos\theta)$	$P_3(\cos\theta)$	$P_4(\cos\theta)$	$P_5(\cos\theta)$
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5°	0,9962	0,9886	0,9773	0,9623	0,9437
10°	0,9848	0,9548	0,9106	0,8532	0,7840
15°	0,9659	0,8995	0,8042	0,6847	0,5471
20°	0,9397	0,8245	0,6649	0,4750	0,2715
25°	0,9063	0,7321	0,5016	0,2465	0,0009
30°	0,8660	0,6250	0,3248	0,0234	–0,2233
35°	0,8192	0,5065	0,1454	–0,1714	–0,3691
40°	0,7660	0,3802	–0,0252	–0,3190	–0,4197
45°	0,7071	0,2500	–0,1768	–0,4063	–0,3757
50°	0,6428	0,1198	–0,3002	–0,4275	–0,2545
55°	0,5736	–0,0065	–0,3886	–0,3852	–0,0868
60°	0,5000	–0,1250	–0,4375	–0,2891	0,0898
65°	0,4226	–0,2321	–0,4452	–0,1552	0,2381
70°	0,3420	–0,3245	–0,4130	–0,0038	0,3281
75°	0,2588	–0,3995	–0,3449	0,1434	0,3427
80°	0,1737	–0,4548	–0,2474	0,2659	0,2810
85°	0,0872	–0,4886	–0,1291	0,3468	0,1577
90°	0,0000	–0,5000	0,0000	0,3750	0,0000

Seção V: Integrais Elípticas

29 Integrais Elípticas Completas de 1ª e 2ª Espécies

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta, \quad k = \operatorname{sen} \psi$$

ψ	K	E
0°	1,5708	1,5708
1	1,5709	1,5707
2	1,5713	1,5703
3	1,5719	1,5697
4	1,5727	1,5689
5	1,5738	1,5678
6	1,5751	1,5665
7	1,5767	1,5649
8	1,5785	1,5632
9	1,5805	1,5611
10	1,5828	1,5589
11	1,5854	1,5564
12	1,5882	1,5537
13	1,5913	1,5507
14	1,5946	1,5476
15	1,5981	1,5442
16	1,6020	1,5405
17	1,6061	1,5367
18	1,6105	1,5326
19	1,6151	1,5283
20	1,6200	1,5238
21	1,6252	1,5191
22	1,6307	1,5141
23	1,6365	1,5090
24	1,6426	1,5037
25	1,6490	1,4981
26	1,6557	1,4924
27	1,6627	1,4864
28	1,6701	1,4803
29	1,6777	1,4740
30	1,6858	1,4675

ψ	K	E
30°	1,6858	1,4675
31	1,6941	1,4608
32	1,7028	1,4539
33	1,7119	1,4469
34	1,7214	1,4397
35	1,7312	1,4323
36	1,7415	1,4248
37	1,7522	1,4171
38	1,7633	1,4092
39	1,7748	1,4013
40	1,7868	1,3931
41	1,7992	1,3849
42	1,8122	1,3765
43	1,8256	1,3680
44	1,8396	1,3594
45	1,8541	1,3506
46	1,8691	1,3418
47	1,8848	1,3329
48	1,9011	1,3238
49	1,9180	1,3147
50	1,9356	1,3055
51	1,9539	1,2963
52	1,9729	1,2870
53	1,9927	1,2776
54	2,0133	1,2681
55	2,0347	1,2587
56	2,0571	1,2492
57	2,0804	1,2397
58	2,1047	1,2301
59	2,1300	1,2206
60	2,1565	1,2111

ψ	K	E
60°	2,1565	1,2111
61	2,1842	1,2015
62	2,2132	1,1920
63	2,2435	1,1826
64	2,2754	1,1732
65	2,3088	1,1638
66	2,3439	1,1545
67	2,3809	1,1453
68	2,4198	1,1362
69	2,4610	1,1272
70	2,5046	1,1184
71	2,5507	1,1096
72	2,5998	1,1011
73	2,6521	1,0927
74	2,7081	1,0844
75	2,7681	1,0764
76	2,8327	1,0686
77	2,9026	1,0611
78	2,9786	1,0538
79	3,0617	1,0468
80	3,1534	1,0401
81	3,2553	1,0338
82	3,3699	1,0278
83	3,5004	1,0223
84	3,6519	1,0172
85	3,8317	1,0127
86	4,0528	1,0086
87	4,3387	1,0053
88	4,7427	1,0026
89	5,4349	1,0008
90	∞	1,0000

Integrais Elípticas Incompletas de 1ª Espécie

30

$$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}},\quad k=\mathrm{sen}\,\psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10°	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20°	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30°	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40°	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50°	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60°	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70°	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80°	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90°	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

Integrais Elípticas Incompletas de 2ª Espécie

31

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,d\theta,\quad k=\mathrm{sen}\,\psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10°	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20°	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30°	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40°	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50°	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60°	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70°	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80°	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90°	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

Seção VI: Tabelas Financeiras

32 Montante Composto

$$(1 + r)^n$$

Se um capital P é aplicado a uma taxa de juros r (em decimais) compostos periodicamente, então no final de n destes períodos o montante acumulado é $A = P(1 + r)^n$.

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	1,0100	1,0125	1,0150	1,0200	1,0250	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600
2	1,0201	1,0252	1,0302	1,0404	1,0506	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236
3	1,0303	1,0380	1,0457	1,0612	1,0769	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910
4	1,0406	1,0509	1,0614	1,0824	1,1038	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625
5	1,0510	1,0641	1,0773	1,1041	1,1314	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382
6	1,0615	1,0774	1,0934	1,1262	1,1597	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185
7	1,0721	1,0909	1,1098	1,1487	1,1887	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036
8	1,0829	1,1045	1,1265	1,1717	1,2184	1,2668	1,3688	1,4775	1,5938
9	1,0937	1,1183	1,1434	1,1951	1,2489	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895
10	1,1046	1,1323	1,1605	1,2190	1,2801	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908
11	1,1157	1,1464	1,1779	1,2434	1,3121	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983
12	1,1268	1,1608	1,1956	1,2682	1,3449	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122
13	1,1381	1,1753	1,2136	1,2936	1,3785	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329
14	1,1495	1,1900	1,2318	1,3195	1,4130	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609
15	1,1610	1,2048	1,2502	1,3459	1,4483	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966
16	1,1726	1,2199	1,2690	1,3728	1,4845	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404
17	1,1843	1,2351	1,2880	1,4002	1,5216	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928
18	1,1961	1,2506	1,3073	1,4282	1,5597	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543
19	1,2081	1,2662	1,3270	1,4568	1,5987	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256
20	1,2202	1,2820	1,3469	1,4859	1,6386	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071
21	1,2324	1,2981	1,3671	1,5157	1,6796	1,8603	2,2788	2,7860	3,3996
22	1,2447	1,3143	1,3876	1,5460	1,7216	1,9161	2,3699	2,9253	3,6035
23	1,2572	1,3307	1,4084	1,5769	1,7646	1,9736	2,4647	3,0715	3,8197
24	1,2697	1,3474	1,4295	1,6084	1,8087	2,0328	2,5633	3,2251	4,0489
25	1,2824	1,3642	1,4509	1,6406	1,8539	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919
26	1,2953	1,3812	1,4727	1,6734	1,9003	2,1566	2,7725	3,5557	4,5494
27	1,3082	1,3985	1,4948	1,7069	1,9478	2,2213	2,8834	3,7335	4,8223
28	1,3213	1,4160	1,5172	1,7410	1,9965	2,2879	2,9987	3,9201	5,1117
29	1,3345	1,4337	1,5400	1,7758	2,0464	2,3566	3,1187	4,1161	5,4184
30	1,3478	1,4516	1,5631	1,8114	2,0976	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435
31	1,3613	1,4698	1,5865	1,8476	2,1500	2,5001	3,3731	4,5380	6,0881
32	1,3749	1,4881	1,6103	1,8845	2,2038	2,5751	3,5081	4,7649	6,4534
33	1,3887	1,5067	1,6345	1,9222	2,2589	2,6523	3,6484	5,0032	6,8406
34	1,4026	1,5256	1,6590	1,9607	2,3153	2,7319	3,7943	5,2533	7,2510
35	1,4166	1,5446	1,6839	1,9999	2,3732	2,8139	3,9461	5,5160	7,6861
36	1,4308	1,5639	1,7091	2,0399	2,4325	2,8983	4,1039	5,7918	8,1473
37	1,4451	1,5835	1,7348	2,0807	2,4933	2,9852	4,2681	6,0814	8,6361
38	1,4595	1,6033	1,7608	2,1223	2,5557	3,0748	4,4388	6,3855	9,1543
39	1,4741	1,6233	1,7872	2,1647	2,6196	3,1670	4,6164	6,7048	9,7035
40	1,4889	1,6436	1,8140	2,2080	2,6851	3,2620	4,8010	7,0400	10,2857
41	1,5038	1,6642	1,8412	2,2522	2,7522	3,3599	4,9931	7,3920	10,9029
42	1,5188	1,6850	1,8688	2,2972	2,8210	3,4607	5,1928	7,7616	11,5570
43	1,5340	1,7060	1,8969	2,3432	2,8915	3,5645	5,4005	8,1497	12,2505
44	1,5493	1,7274	1,9253	2,3901	2,9638	3,6715	5,6165	8,5572	12,9855
45	1,5648	1,7489	1,9542	2,4379	3,0379	3,7816	5,8412	8,9850	13,7646
46	1,5805	1,7708	1,9835	2,4866	3,1139	3,8950	6,0748	9,4343	14,5905
47	1,5963	1,7929	2,0133	2,5363	3,1917	4,0119	6,3178	9,9060	15,4659
48	1,6122	1,8154	2,0435	2,5871	3,2715	4,1323	6,5705	10,4013	16,3939
49	1,6283	1,8380	2,0741	2,6388	3,3533	4,2562	6,8333	10,9213	17,3775
50	1,6446	1,8610	2,1052	2,6916	3,4371	4,3839	7,1067	11,4674	18,4202

Valor Presente de um Montante 33

$$(1 + r)^{-n}$$

O valor presente P que equivalerá a um montante A no final de n períodos, sendo aplicado a uma taxa de juros r (em decimais) compostos a cada período, é $P = A(1 + r)^{-n}$.

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	0,99010	0,98765	0,98522	0,98039	0,97561	0,97087	0,96154	0,95238	0,94340
2	0,98030	0,97546	0,97066	0,96117	0,95181	0,94260	0,92456	0,90703	0,89000
3	0,97059	0,96342	0,95632	0,94232	0,92860	0,91514	0,88900	0,86384	0,83962
4	0,96098	0,95152	0,94218	0,92385	0,90595	0,88849	0,85480	0,82270	0,79209
5	0,95147	0,93978	0,92826	0,90573	0,88385	0,86261	0,82193	0,78353	0,74726
6	0,94205	0,92817	0,91454	0,88797	0,86230	0,83748	0,79031	0,74622	0,70496
7	0,93272	0,91672	0,90103	0,87056	0,84127	0,81309	0,75992	0,71068	0,66506
8	0,92348	0,90540	0,88771	0,85349	0,82075	0,78941	0,73069	0,67684	0,62741
9	0,91434	0,89422	0,87459	0,83676	0,80073	0,76642	0,70259	0,64461	0,59190
10	0,90529	0,88318	0,86167	0,82035	0,78120	0,74409	0,67556	0,61391	0,55839
11	0,89632	0,87228	0,84893	0,80426	0,76214	0,72242	0,64958	0,58468	0,52679
12	0,88745	0,86151	0,83639	0,78849	0,74356	0,70138	0,62460	0,55684	0,49697
13	0,87866	0,85087	0,82403	0,77303	0,72542	0,68095	0,60057	0,53032	0,46884
14	0,86996	0,84037	0,81185	0,75788	0,70773	0,66112	0,57748	0,50507	0,44230
15	0,86135	0,82999	0,79985	0,74301	0,69047	0,64186	0,55526	0,48102	0,41727
16	0,85282	0,81975	0,78803	0,72845	0,67362	0,62317	0,53391	0,45811	0,39365
17	0,84438	0,80963	0,77639	0,71416	0,65720	0,60502	0,51337	0,43630	0,37136
18	0,83602	0,79963	0,76491	0,70016	0,64117	0,58739	0,49363	0,41552	0,35034
19	0,82774	0,78976	0,75361	0,68643	0,62553	0,57029	0,47464	0,39573	0,33051
20	0,81954	0,78001	0,74247	0,67297	0,61027	0,55368	0,45639	0,37689	0,31180
21	0,81143	0,77038	0,73150	0,65978	0,59539	0,53755	0,43883	0,35894	0,29416
22	0,80340	0,76087	0,72069	0,64684	0,58086	0,52189	0,42196	0,34185	0,27751
23	0,79544	0,75147	0,71004	0,63416	0,56670	0,50669	0,40573	0,32557	0,26180
24	0,78757	0,74220	0,69954	0,62172	0,55288	0,49193	0,39012	0,31007	0,24698
25	0,77977	0,73303	0,68921	0,60953	0,53939	0,47761	0,37512	0,29530	0,23300
26	0,77205	0,72398	0,67902	0,59758	0,52623	0,46369	0,36069	0,28124	0,21981
27	0,76440	0,71505	0,66899	0,58586	0,51340	0,45019	0,34682	0,26785	0,20737
28	0,75684	0,70622	0,65910	0,57437	0,50088	0,43708	0,33348	0,25509	0,19563
29	0,74934	0,69750	0,64936	0,56311	0,48866	0,42435	0,32065	0,24295	0,18456
30	0,74192	0,68889	0,63976	0,55207	0,47674	0,41199	0,30832	0,23138	0,17411
31	0,73458	0,68038	0,63031	0,54125	0,46511	0,39999	0,29646	0,22036	0,16425
32	0,72730	0,67198	0,62099	0,53063	0,45377	0,38834	0,28506	0,20987	0,15496
33	0,72010	0,66369	0,61182	0,52023	0,44270	0,37703	0,27409	0,19987	0,14619
34	0,71297	0,65549	0,60277	0,51003	0,43191	0,36604	0,26355	0,19035	0,13791
35	0,70591	0,64740	0,59387	0,50003	0,42137	0,35538	0,25342	0,18129	0,13011
36	0,69892	0,63941	0,58509	0,49022	0,41109	0,34503	0,24367	0,17266	0,12274
37	0,69200	0,63152	0,57644	0,48061	0,40107	0,33498	0,23430	0,16444	0,11579
38	0,68515	0,62372	0,56792	0,47119	0,39128	0,32523	0,22529	0,15661	0,10924
39	0,67837	0,61602	0,55953	0,46195	0,38174	0,31575	0,21662	0,14915	0,10306
40	0,67165	0,60841	0,55126	0,45289	0,37243	0,30656	0,20829	0,14205	0,09722
41	0,66500	0,60090	0,54312	0,44401	0,36335	0,29763	0,20028	0,13528	0,09172
42	0,65842	0,59348	0,53509	0,43530	0,35448	0,28896	0,19257	0,12884	0,08653
43	0,65190	0,58616	0,52718	0,42677	0,34584	0,28054	0,18517	0,12270	0,08163
44	0,64545	0,57892	0,51939	0,41840	0,33740	0,27237	0,17805	0,11686	0,07701
45	0,63905	0,57177	0,51171	0,41020	0,32917	0,26444	0,17120	0,11130	0,07265
46	0,63273	0,56471	0,50415	0,40215	0,32115	0,25674	0,16461	0,10600	0,06854
47	0,62646	0,55774	0,49670	0,39427	0,31331	0,24926	0,15828	0,10095	0,06466
48	0,62026	0,55086	0,48936	0,38654	0,30567	0,24200	0,15219	0,09614	0,06100
49	0,61412	0,54406	0,48213	0,37896	0,29822	0,23495	0,14634	0,09156	0,05755
50	0,60804	0,53734	0,47500	0,37153	0,29094	0,22811	0,14071	0,08720	0,05429

34 Montante de uma Anuidade

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Se um mesmo capital P é aplicado a cada final de período a uma mesma taxa de juros r (em decimais) compostos periodicamente, então no final de n períodos o montante acumulado é $A = P\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$. O processo é chamado de *anuidade*.

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0100	2,0125	2,0150	2,0200	2,0250	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600
3	3,0301	3,0377	3,0452	3,0604	3,0756	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836
4	4,0604	4,0756	4,0909	4,1216	4,1525	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746
5	5,1010	5,1266	5,1523	5,2040	5,2563	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371
6	6,1520	6,1907	6,2296	6,3081	6,3877	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753
7	7,2135	7,2680	7,3230	7,4343	7,5474	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938
8	8,2857	8,3589	8,4328	8,5830	8,7361	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975
9	9,3685	9,4634	9,5593	9,7546	9,9545	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913
10	10,4622	10,5817	10,7027	10,9497	11,2034	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808
11	11,5668	11,7139	11,8633	12,1687	12,4835	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716
12	12,6825	12,8604	13,0412	13,4121	13,7956	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699
13	13,8093	14,0211	14,2368	14,6803	15,1404	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821
14	14,9474	15,1964	15,4504	15,9739	16,5190	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151
15	16,0969	16,3863	16,6821	17,2934	17,9319	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760
16	17,2579	17,5912	17,9324	18,6393	19,3802	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725
17	18,4304	18,8111	19,2014	20,0121	20,8647	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129
18	19,6147	20,0462	20,4894	21,4123	22,3863	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057
19	20,8109	21,2968	21,7967	22,8406	23,9460	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600
20	22,0190	22,5630	23,1237	24,2974	25,5447	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856
21	23,2392	23,8450	24,4705	25,7833	27,1833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927
22	24,4716	25,1431	25,8376	27,2990	28,8629	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923
23	25,7163	26,4574	27,2251	28,8450	30,5844	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958
24	26,9735	27,7881	28,6335	30,4219	32,3490	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156
25	28,2432	29,1354	30,0630	32,0303	34,1578	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645
26	29,5256	30,4996	31,5140	33,6709	36,0117	38,5530	44,3117	51,1135	59,1564
27	30,8209	31,8809	32,9867	35,3443	37,9120	40,7096	47,0842	54,6691	63,7058
28	32,1291	33,2794	34,4815	37,0512	39,8598	42,9309	49,9676	58,4026	68,5281
29	33,4504	34,6954	35,9987	38,7922	41,8563	45,2189	52,9663	62,3227	73,6398
30	34,7849	36,1291	37,5387	40,5681	43,9027	47,5754	56,0849	66,4388	79,0582
31	36,1327	37,5807	39,1018	42,3794	46,0003	50,0027	59,3283	70,7608	84,8017
32	37,4941	39,0504	40,6883	44,2270	48,1503	52,5028	62,7015	75,2988	90,8898
33	38,8690	40,5386	42,2986	46,1116	50,3540	55,0778	66,2095	80,0638	97,3432
34	40,2577	42,0453	43,9331	48,0338	52,6129	57,7302	69,8579	85,0670	104,1838
35	41,6603	43,5709	45,5921	49,9945	54,9282	60,4621	73,6522	90,3203	111,4348
36	43,0769	45,1155	47,2760	51,9944	57,3014	63,2759	77,5983	95,8363	119,1209
37	44,5076	46,6794	48,9851	54,0343	59,7339	66,1742	81,7022	101,6281	127,2681
38	45,9527	48,2629	50,7199	56,1149	62,2273	69,1594	85,9703	107,7095	135,9042
39	47,4123	49,8662	52,4807	58,2372	64,7830	72,2342	90,4091	114,0950	145,0585
40	48,8864	51,4896	54,2679	60,4020	67,4026	75,4013	95,0255	120,7998	154,7620
41	50,3752	53,1332	56,0819	62,6100	70,0876	78,6633	99,8265	127,8398	165,0477
42	51,8790	54,7973	57,9231	64,8622	72,8398	82,0232	104,8196	135,2318	175,9505
43	53,3978	56,4823	59,7920	67,1595	75,6608	85,4839	110,0124	142,9933	187,5076
44	54,9318	58,1883	61,6889	69,5027	78,5523	89,0484	115,4129	151,1430	199,7580
45	56,4811	59,9157	63,6142	71,8927	81,5161	92,7199	121,0294	159,7002	212,7435
46	58,0459	61,6646	65,5684	74,3306	84,5540	96,5015	126,8706	168,6852	226,5081
47	59,6263	63,4354	67,5519	76,8172	87,6679	100,3965	132,9454	178,1194	241,0986
48	61,2226	65,2284	69,5652	79,3535	90,8596	104,4084	139,2632	188,0254	256,5645
49	62,8348	67,0437	71,6087	81,9406	94,1311	108,5406	145,8337	198,4267	272,9584
50	64,4632	68,8818	73,6828	84,5794	97,4843	112,7969	152,6671	209,3480	290,3359

Valor Presente de uma Anuidade 35

$$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

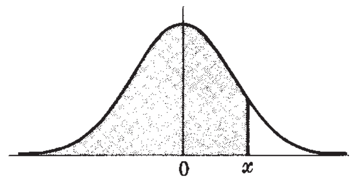
O valor presente P de uma anuidade A que é aplicada a cada final de período a uma mesma taxa de juros r (em decimais) compostos a cada período, é $P = A\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$.

n \ r	1%	$1\frac{1}{4}$%	$1\frac{1}{2}$%	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%	6%
1	0,9901	0,9877	0,9852	0,9804	0,9756	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434
2	1,9704	1,9631	1,9559	1,9416	1,9274	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334
3	2,9410	2,9265	2,9122	2,8839	2,8560	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730
4	3,9020	3,8781	3,8544	3,8077	3,7620	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651
5	4,8534	4,8178	4,7826	4,7135	4,6458	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124
6	5,7955	5,7460	5,6972	5,6014	5,5081	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173
7	6,7282	6,6627	6,5982	6,4720	6,3494	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824
8	7,6517	7,5681	7,4859	7,3255	7,1701	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098
9	8,5660	8,4623	8,3605	8,1622	7,9709	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017
10	9,4713	9,3455	9,2222	8,9826	8,7521	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601
11	10,3676	10,2178	10,0711	9,7868	9,5142	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869
12	11,2551	11,0793	10,9075	10,5753	10,2578	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838
13	12,1337	11,9302	11,7315	11,3484	10,9832	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527
14	13,0037	12,7706	12,5434	12,1062	11,6909	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950
15	13,8651	13,6005	13,3432	12,8493	12,3814	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122
16	14,7179	14,4203	14,1313	13,5777	13,0550	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059
17	15,5623	15,2299	14,9076	14,2919	13,7122	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773
18	16,3983	16,0295	15,6726	14,9920	14,3534	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276
19	17,2260	16,8193	16,4262	15,6785	14,9789	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581
20	18,0456	17,5993	17,1686	16,3514	15,5892	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699
21	18,8570	18,3697	17,9001	17,0112	16,1845	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641
22	19,6604	19,1306	18,6208	17,6580	16,7654	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416
23	20,4558	19,8820	19,3309	18,2922	17,3321	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034
24	21,2434	20,6242	20,0304	18,9139	17,8850	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504
25	22,0232	21,3573	20,7196	19,5235	18,4244	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834
26	22,7952	22,0813	21,3986	20,1210	18,9506	17,8768	15,9828	14,3752	13,0032
27	23,5596	22,7963	22,0676	20,7069	19,4640	18,3270	16,3296	14,6430	13,2105
28	24,3164	23,5025	22,7267	21,2813	19,9649	18,7641	16,6631	14,8981	13,4062
29	25,0658	24,2000	23,3761	21,8444	20,4535	19,1885	16,9837	15,1411	13,5907
30	25,8077	24,8889	24,0158	22,3965	20,9303	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648
31	26,5423	25,5693	24,6461	22,9377	21,3954	20,0004	17,5885	15,5928	13,9291
32	27,2696	26,2413	25,2671	23,4683	21,8492	20,3888	17,8736	15,8027	14,0840
33	27,9897	26,9050	25,8790	23,9886	22,2919	20,7658	18,1476	16,0025	14,2302
34	28,7027	27,5605	26,4817	24,4986	22,7238	21,1318	18,4112	16,1929	14,3681
35	29,4086	28,2079	27,0756	24,9986	23,1452	21,4872	18,6646	16,3742	14,4982
36	30,1075	28,8473	27,6607	25,4888	23,5563	21,8323	18,9083	16,5469	14,6210
37	30,7995	29,4788	28,2371	25,9695	23,9573	22,1672	19,1426	16,7113	14,7368
38	31,4847	30,1025	28,8051	26,4406	24,3486	22,4925	19,3679	16,8679	14,8460
39	32,1630	30,7185	29,3646	26,9026	24,7303	22,8082	19,5845	17,0170	14,9491
40	32,8347	31,3269	29,9158	27,3555	25,1028	23,1148	19,7928	17,1591	15,0463
41	33,4997	31,9278	30,4590	27,7995	25,4661	23,4124	19,9931	17,2944	15,1380
42	34,1581	32,5213	30,9941	28,2348	25,8206	23,7014	20,1856	17,4232	15,2245
43	34,8100	33,1075	31,5212	28,6616	26,1664	23,9819	20,3708	17,5459	15,3062
44	35,4555	33,6864	32,0406	29,0800	26,5038	24,2543	20,5488	17,6628	15,3832
45	36,0945	34,2582	32,5523	29,4902	26,8330	24,5187	20,7200	17,7741	15,4558
46	36,7272	34,8229	33,0565	29,8923	27,1542	24,7754	20,8847	17,8801	15,5244
47	37,3537	35,3806	33,5532	30,2866	27,4675	25,0247	21,0429	17,9810	15,5890
48	37,9740	35,9315	34,0426	30,6731	27,7732	25,2667	21,1951	18,0772	15,6500
49	38,5881	36,4755	34,5247	31,0521	28,0714	25,5017	21,3415	18,1687	15,7076
50	39,1961	37,0129	34,9997	31,4236	28,3623	25,7298	21,4822	18,2559	15,7619

Seção VII: Probabilidade e Estatística

36 Áreas sob a Curva Normal Padrão

de $-\infty$ a x $\qquad \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$



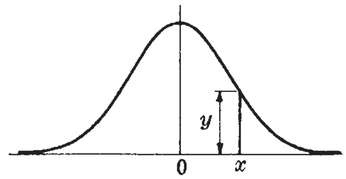
Nota: erf $(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$ [Ver também 36.1]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Ordenadas da Curva Normal Padrão

37

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

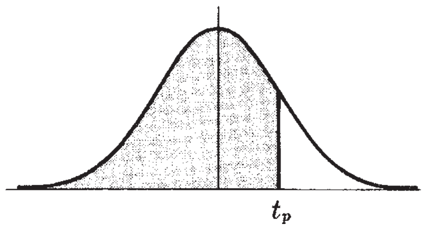


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

38

Valores Percentis t_p da Distribuição t de Student

com n graus de liberdade (área sombreada = p)



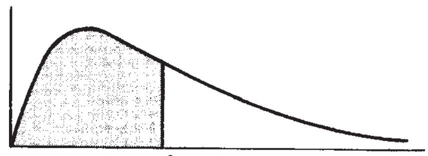
n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	2,02	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
∞	2,58	2,33	1,96	1,645	1,28	0,842	0,674	0,524	0,253	0,126

Fonte: R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (6th edition, 1963), Table III, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, sob permissão dos autores e editores.

Valores Percentis χ_p^2 da Distribuição χ^2 (Qui-Quadrado)

39

com n graus de liberdade (área sombreada = p)

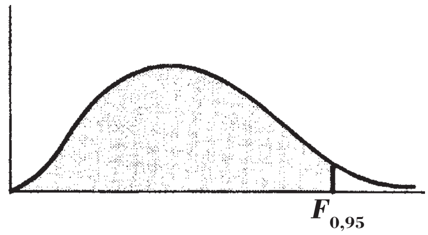


n	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,0010	0,0002	0,0000
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,0100
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84
20	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6	10,3	8,90	8,03
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	26,0	21,3	17,2	14,0	12,3	11,0	9,54	8,64
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26
24	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19,0	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	19,9	16,5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	23,6	19,8	17,7	16,0	14,3	13,1
30	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15,0	13,8
40	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	45,6	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7
50	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	42,9	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0
60	92,0	88,4	83,3	79,1	74,4	67,0	59,3	52,3	46,5	43,2	40,5	37,5	35,5
70	104,2	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60,4	57,2	53,5	51,2
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	80,6	73,3	69,1	65,6	61,8	59,2
100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	90,1	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3

Fonte: Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the χ^2 distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), sob permissão do autor e editor.

40 Valores do 95º Percentil da Distribuição F

n_1 = graus de liberdade do numerador
n_2 = graus de liberdade do denominador
(área sombreada = 0,95)



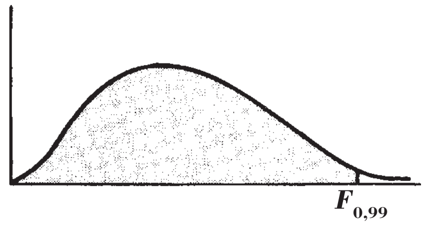
n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,3	248,0	250,1	251,1	252,2	253,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,46	19,46	19,47	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,74	8,69	8,66	8,62	8,60	8,58	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,80	5,75	5,71	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,56	4,50	4,46	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,44	3,38	3,34	3,32	3,28	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,15	3,08	3,05	3,03	2,98	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,93	2,86	2,82	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,77	2,70	2,67	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,65	2,57	2,53	2,50	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,54	2,46	2,42	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,60	2,51	2,46	2,38	2,34	2,32	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,33	2,25	2,21	2,18	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,28	2,20	2,16	2,13	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,23	2,15	2,11	2,08	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,19	2,11	2,07	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,15	2,07	2,02	2,00	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,12	2,04	1,99	1,96	1,90	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,07	1,98	1,93	1,91	1,84	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	2,03	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,12	2,02	1,96	1,87	1,81	1,78	1,72	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,75	1,65	1,59	1,56	1,48	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,72	1,62	1,56	1,53	1,45	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,05	1,88	1,77	1,70	1,60	1,54	1,51	1,42	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,64	1,54	1,47	1,44	1,34	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,62	1,52	1,45	1,42	1,32	1,19
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	1,96	1,78	1,67	1,60	1,49	1,42	1,38	1,28	1,13
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,57	1,46	1,40	1,32	1,24	1,00

Fonte: G. W. Snedecor and W. G. Cochran, *Statistical Methods* (6th edition, 1967), Iowa State University Press, Ames, Iowa, sob permissão dos autores e editor.

Valores do 99º Percentil da Distribuição F

41

n_1 = graus de liberdade do numerador
n_2 = graus de liberdade do denominador
(área sombreada = 0,99)



n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6208	6258	6286	6302	6334	6366
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,45	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,41	27,49	27,05	28,63	26,69	26,50	26,41	26,35	26,23	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	14,02	13,83	13,74	13,69	13,57	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,68	9,55	9,38	9,29	9,24	9,13	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,39	7,23	7,14	7,09	6,99	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,15	5,98	5,90	5,85	5,75	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,36	5,20	5,11	5,06	4,96	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,80	4,64	4,56	4,51	4,41	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,41	4,25	4,17	4,12	4,01	3,91
11	9,05	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,10	3,94	3,86	3,80	3,70	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,86	3,70	3,61	3,56	3,46	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,67	3,51	3,42	3,37	3,27	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,51	3,34	3,26	3,21	3,11	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,36	3,20	3,12	3,07	2,97	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,25	3,10	3,01	2,96	2,86	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,16	3,00	2,92	2,86	2,76	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,19	3,07	2,91	2,83	2,78	2,68	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	3,00	2,84	2,76	2,70	2,60	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,94	2,77	2,69	2,63	2,53	2,42
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,83	2,67	2,58	2,53	2,42	2,31
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,74	2,58	2,49	2,44	2,33	2,21
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,77	2,66	2,50	2,41	2,36	2,25	2,13
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,23	2,90	2,71	2,60	2,44	2,35	2,30	2,18	2,06
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,55	2,38	2,29	2,24	2,13	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,49	2,37	2,20	2,11	2,05	1,94	1,81
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	2,88	2,56	2,39	2,26	2,10	2,00	1,94	1,82	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,20	2,03	1,93	1,87	1,74	1,60
70	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,77	2,45	2,28	2,15	1,98	1,88	1,82	1,69	1,53
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,74	2,41	2,24	2,11	1,94	1,84	1,78	1,65	1,49
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,20	2,99	2,69	2,36	2,19	2,06	1,89	1,79	1,73	1,59	1,43
150	6,81	4,75	3,91	3,44	3,14	2,92	2,62	2,30	2,12	2,00	1,83	1,72	1,66	1,51	1,33
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,90	2,60	2,28	2,09	1,97	1,79	1,69	1,62	1,48	1,28
400	6,70	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,55	2,23	2,04	1,92	1,74	1,64	1,57	1,42	1,19
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,87	1,69	1,59	1,52	1,36	1,00

Fonte: G. W. Snedecor and W. G. Cochran, *Statistical Methods* (6th edition, 1967), Iowa State University Press, Ames, Iowa, sob permissão dos autores e editor.

42

Números Aleatórios

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

Índice de Símbolos e Notações Especiais

A lista a seguir mostra símbolos e notações especiais junto com as páginas nas quais estão definidos ou ocorrem pela primeira vez. Os casos de símbolos com mais de um significado deverão ficar claros pelo contexto.

Símbolos

Símbolos Gregos

Notações

Índice